Desarrollo de Habilidades
Matemáticas
SECUNDARIA
1er. Grado

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE GUANAJUATO

Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Primer grado de secundaria fue desarrollado por la Dirección de Medios y Métodos Educativos, de la Dirección General para la Pertinencia y la Corresponsabilidad de la Educación, Secretaría de Educación de Guanajuato.

Secretaría de Educación de Guanajuato

Subsecretaría para el Desarrollo Educativo

Dirección General para la Pertinencia y la Corresponsabilidad de la Educación

Dirección de Medios y Métodos Educativos

Departamento de Matemáticas

Primera edición, 2012

Secretaría de Educación de Guanajuato, 2012
Conjunto Administrativo Pozuelos s/n, Centro,
36000, Guanajuato, Gto.

Impreso en México

Presentación

A las maestras y maestros:

La evaluación es un proceso necesario para identificar los aprendizajes que las alumnas y los alumnos han adquirido satisfactoriamente y aquellos que deberán ser reforzados.

Año con año, la Secretaría de Educación Pública aplica la prueba ENLACE a todas las primarias y secundarias del país, para tener información sobre el desempeño escolar de los alumnos.

En este contexto, ***Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Primer grado de secundaria*** es un material que tiene como propósito ofrecerles una herramienta de apoyo que les permita guiar a sus alumnos en la preparación para la prueba ENLACE 2012, a través de una serie de actividades elaboradas con base en el programa de estudio de matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2011.

Los invitamos a que aprovechen este recurso y que apoyen a sus alumnos en el uso del mismo, de modo que les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora. Para ello, les sugerimos atender las ***Orientaciones metodológicas*** que se encuentran en este cuadernillo.

Estamos seguros de que con su compromiso y colaboración continuaremos trabajando para hacer de Guanajuato un estado de acciones encaminadas a mejorar la calidad de la educación.

A las alumnas y alumnos:

La evaluación es un elemento necesario en tu proceso de aprendizaje, ya que mediante ella te es posible detectar cuáles son los temas y contenidos que dominas y aquellos que necesitas fortalecer.

La prueba ENLACE, que año con año se aplica a todas las primarias y secundarias del país, tiene la finalidad de evaluar tus conocimientos en el área de español, matemáticas y una tercera asignatura, y ofrecerte un diagnóstico individual sobre los conocimientos y habilidades en los temas evaluados.

Durante este ciclo escolar, la Secretaría de Educación de Guanajuato pone a tu disposición el material ***Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Primer grado de secundaria***, el cual fue elaborado con el propósito de servirte como una herramienta de preparación para la prueba Enlace 2012. Este cuadernillo contiene una serie de actividades elaboradas con base en el programa de estudio de matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2011.

Es importante que para realizar el trabajo que te propone este cuadernillo, te apoyes en tu maestro de la asignatura de matemáticas, ya que él te podrá orientar en el uso del mismo.

Recuerda que la evaluación es un complemento de tu aprendizaje, por lo que te invitamos a considerar este proceso como una oportunidad para analizar tu desempeño escolar.

¿Cómo está organizado el cuadernillo de apoyo?

El cuadernillo está diseñado por temas. Cada lección iniciará con la siguiente información:

Bloque del programa de estudio que incluye el tema a revisar.

Aprendizaje que el alumno debe adquirir en ese bloque, eje temático y tema, de acuerdo al programa de estudio.

Tema del que tratará la lección.

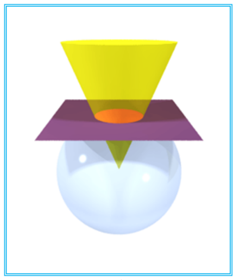
Eje temático al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

Tema general al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

Subtema específico al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

TEMA 5. CORTES EN ESFERAS Y CONOS

Bloque V
Eje temático: Forma, espacio y medida **Tema:** Formas geométricas **Subtema:** Cuerpos geométricos **Resultado general de aprendizaje:** Anticipa cómo cambia el volumen de esferas, cilindros y conos al aumentar o disminuir alguna de sus dimensiones.
Resultado específico de aprendizaje: Determina la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto.



Aprendizaje específico que se desea lograr en la lección.

Presenta una **imagen** alusiva al tema.

Cada tema incluye cuatro secciones que se describen a continuación:

Introducción

Consiste en el planteamiento general del tema que se va a trabajar. Esta sección incluye una situación cotidiana que permite retomar los conocimientos previos sobre el tema.

Desarrollo

Constituye la parte más amplia del tema, ya que contiene la presentación de contenidos y actividades que permiten fortalecer los aprendizajes que serán evaluados.

Cierre

Incluye una breve descripción de los contenidos retomados en la lección. También contiene sitios de interés que se pueden consultar para ampliar los conocimientos sobre el tema.

Evaluación

En esta sección se deberá resolver una evaluación sobre los contenidos retomados en la lección. Es importante que se utilice la ***Hoja de respuestas*** que se encuentra en la parte posterior del cuadernillo, ya que es necesario practicar el llenado de los círculos que presenta la prueba tipo ENLACE.

Orientaciones metodológicas

Este cuadernillo ha sido diseñado con la finalidad de que los alumnos procesen la información y desarrollen las actividades y evaluaciones contenidas en cada uno de los temas, de manera individual, empleando tiempo extra clase. Sin embargo, será de gran apoyo las orientaciones y retroalimentaciones que puedan obtener de la maestra o maestro que les imparte la asignatura de matemáticas.

En este sentido, se solicita a las maestras y los maestros que atiendan a las siguientes orientaciones metodológicas, para apoyar muy comprometidamente a sus alumnos, de modo que este recurso didáctico les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora.

- En un primer momento, acompañar a los alumnos en la lectura de la presentación y organización del cuadernillo. Identificar y comentar con ellos las temas específicos que han sido desarrollados. Esto se puede hacer de manera grupal en un espacio de clase no mayor a 10 minutos.

- Previo al estudio de un tema:

  Presentar la situación planteada en la introducción. Esto con la intención de generar una activación cognitiva en los alumnos en relación con la temática a estudiar.

  Orientar la atención de los alumnos sobre los aspectos del tema en los que deberán poner especial cuidado al momento de procesar la información y realizar las actividades y evaluaciones plantedas.
  Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 7 minutos.

- Posterior al estudio de un tema:

  Retroalimentar el aprendizaje de los alumnos mediante una actividad grupal en la que hagan una recapitulación breve sobre el desarrollo de las actividades y las soluciones de la evaluación. Esto con la intención de socializar el aprendizaje individual de los alumnos y resolver las dudas que se presenten.
  Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 12 minutos.

Esperamos que estas orientaciones sean de utilidad para lograr el fortalecimiento de los temas clave que contiene el cuadernillo y generar la adquisición de los aprendizajes esperados en los alumnos.

Contenido

TEMA 1. FRACCIONES MIXTAS

Bloque II

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

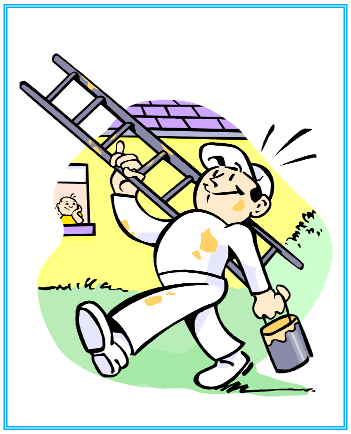
Tema: Significado y uso de las operaciones

Subtema: Problemas aditivos

Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas que implican efectuar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con fracciones.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que implican el uso de las operaciones aritméticas básicas al tratar con cantidades dadas en fracciones mixtas.



Introducción:

El papá de Jorge se dedica a pintar casas y ha calculado que ocupa $5\frac{1}{2}$ cubetas de 15 litros para un trabajo que le han solicitado. Si el recipiente que utiliza para trabajar tiene una capacidad de $3\frac{3}{4}$ litros, ¿Cuántas veces tendrá que llenar su recipiente para terminarse la pintura?

Si observas los datos que se indican en la situación anterior, notarás que dos de las cantidades dadas presentan una parte entera seguida de una fracción, $5\frac{1}{2}$ y $3\frac{3}{4}$. Para resolver este problema necesitarás saber la manera en que se desarrollan las *operaciones aritméticas* cuando tratamos con este tipo de cantidades, conocidas comúnmente como ***fracciones mixtas***.

Desarrollo:

A continuación te presentamos la manera en que se desarrollan las operaciones aritméticas cuando tenemos cantidades dadas como **fracciones mixtas**. Para ello describiremos previamente lo que es una fracción mixta y, conforme vayamos presentando el procedimiento para realizar cada una de las operaciones con este tipo de cantidades, recordaremos significado de cada una de ellas dentro del conjunto de los números fraccionarios.

¿Qué son las fracciones mixtas?

Recuerda

*Una **fracción** es la expresión de una cantidad que representa la relación entre una parte (o número de partes) y el todo. Para definirla, necesitamos tres elementos:*

1. *Un todo, considerado como unidad (y que puede variar de una situación a otra).*
2. *Una partición de ese todo en "b" partes iguales (con $b>0$).*
   ¿Por qué "b" tiene que ser mayor que cero"? Porque no se puede dividir algo en 0 partes, no tiene sentido.
3. *La referencia a un número "a" de esas partes.*

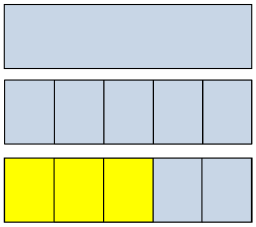
Podemos en general decir que:

Las "a" partes que se toman del total "b" de partes en que se ha dividido un todo se conoce como ***una fracción*** y se representa de la forma:

$$\frac{a}{b}, \text{ con } b>0.$$

A la letra "a" se le conoce como ***numerador*** y a la letra "b" como ***denominador*** de la fracción.

Caso 1:



⇦ Tenemos un rectángulo azul que representa el todo o la unidad.

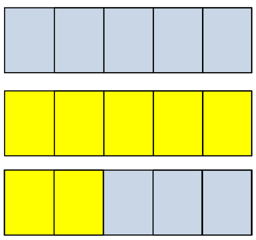
⇦ Dividimos el todo en 5 partes iguales, en decir, $b=5$ (denominador).

⇦ Tomamos 3 partes (en color amarillo) del total de partes en que fue dividido el todo, o sea, $a=3$ (numerador).

Numéricamente la fracción anterior se escribe como $\frac{3}{5}$ y se lee "tres quintos".

Observa que en el caso 1 el numerador es menor que el denominador. A este tipo de fracciones se les conoce como ***fracciones propias***. Existen casos en los que el numerador es mayor que el denominador, en ellos estamos tomando un número de partes mayor al número total de partes en que se ha dividido un todo y, lógicamente, esta fracción excede el valor del todo, es decir, de la unidad. A este tipo de fracciones se les denomina ***fracciones impropias***.

Caso 2:



⇦ Tenemos un rectángulo azul que representa el todo (la unidad), el cuál hemos dividido en 5 partes iguales.

⇦ Tomamos 7 partes iguales a las que se ha dividido el rectángulo azul. En este caso estamos tomando un número de partes mayor al número total de partes en el que se ha dividido el todo original ($7>5$) y es evidente que hemos excedido la unidad ya que requerimos de dos rectángulos como el original.

Numéricamente la fracción anterior se escribe como $\frac{7}{5}$ y se lee "siete quintos".

Podemos en general decir que:

> Una ***fracción*** $\frac{a}{b}$ es ***propia*** en todos los caso en que $a<b$.
>
> Una ***fracción*** $\frac{a}{b}$ es ***impropia*** en todos los caso en que $a>b$.

Podrás darte cuenta en el caso 2 que $\frac{7}{5}$ equivale a $\frac{5}{5}$ más $\frac{2}{5}$, es decir, y como se observa en la ilustración, 1 y $\frac{2}{5}$ (una unidad completa y $\frac{2}{5}$ de otra); cantidad que se representa uniendo ambas partes, $1\frac{2}{5}$ y se lee "un entero dos quintos".

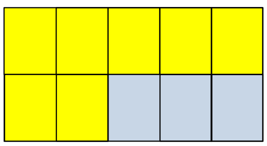
> Cuando una *fracción impropia* se expresa como un *entero* "c" y una *fracción propia* $\frac{a}{b}$, recibe el nombre de ***fracción mixta***, y se representa colocando juntos ambos elementos:
>
> $$c\frac{a}{b}$$

Ejemplos de fracciones mixtas:

$5\frac{7}{9}$ $\quad$ $1\frac{1}{4}$ $\quad$ $2\frac{9}{32}$ $\quad$ $3\frac{1}{2}$ $\quad$ $13\frac{1}{5}$

Para escribir una fracción mixta como una fracción impropia basta con dividir cada una de las unidades de la parte entera en tantas partes iguales como lo indique el denominador de la parte fraccionaria y sumárselas al numerador de la parte fraccionaria. Por ejemplo, para convertir $5\frac{7}{9}$ en una fracción impropia, al dividir cada una de las unidades de la parte entera en 9 partes iguales (novenos) tendríamos $5\times 9=45$ novenos y al sumarlos al numerador de la parte fraccionaria nos quedaría que $5\frac{7}{9}=\frac{45}{9}+\frac{7}{9}=\frac{52}{9}$. Te invitamos a que conviertas en fracciones impropias el resto de las fracciones mixtas dadas como ejemplo.

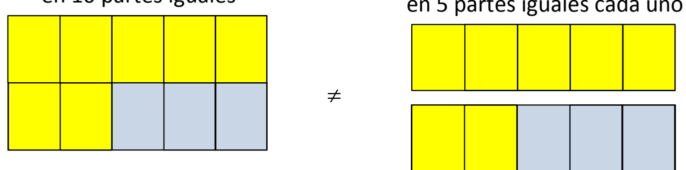
Antes de continuar con las operaciones aritméticas, es preciso diferenciar la fracción del caso 2, de la situación siguiente:



En este caso tomamos 7 partes (amarillas) de un todo que ha sido dividido en 10 partes iguales, es decir, tomamos $\frac{7}{10}$. Aunque físicamente el área amarilla que distinguimos en esta figura es equivalente a área amarilla del ejemplo anterior, no podemos afirmar que éstas cantidades son iguales empleando sus *representaciones numéricas* pues los todos de los cuales son tomadas las cantidades son de magnitud distinta, es decir

7 partes de **un todo** dividido en 10 partes iguales

7 partes de **dos todos** divididos en 5 partes iguales cada uno

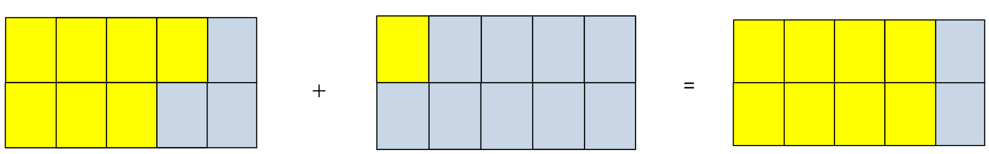


$$\frac{7}{10} \neq 1\frac{2}{5}$$

Suma de fracciones mixtas

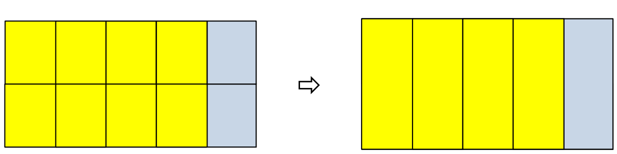
Recuerda

Cuando sumamos fracciones asumimos que éstas son fracciones de una misma unidad o todo. El caso mas sencillo se presenta cundo sumamos fracciones cuya unidad de referencia ha sido dividida en la misma cantidad de partes iguales, es decir, tienen el ***mismo denominador****; en este caso lo único que hay que hacer es sumar las cantidades de los numeradores.*



$$\frac{7}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7+1}{10}=\frac{8}{10}$$

Observa el resultado de la suma anterior, ¿qué sucedería si quitáramos de la figura la línea horizontal que divide el rectángulo?



$$\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Nota que en este caso las áreas amarillas **son equivalentes** ya que, aunque están representadas por fracciones "aparentemente" distintas, abarcan áreas iguales al tener como referencia el mismo todo (o unidad).

Podemos obtener fracciones equivalentes a una dada "aumentando" el número de partes en que se divide el todo, esto se logra multiplicando numerador y denominador por la misma cantidad entera positiva.

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6} \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3}=\frac{2\times3}{3\times3}=\frac{6}{9} \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12} \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$$

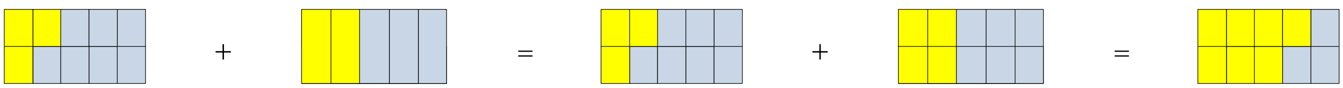
Otro de los procedimientos para obtener fracciones equivalentes a una dada es el de "disminuir" el número de partes en que se divide el todo, si es posible, esto se logra al dividir numerador y denominador por la misma cantidad entera positiva.

$$\frac{18}{24}=\frac{18\div2}{24\div2}=\frac{9}{12} \quad \text{ó} \quad \frac{18}{24}=\frac{18\div3}{24\div3}=\frac{6}{8} \quad \text{ó} \quad \frac{18}{24}=\frac{18\div6}{24\div6}=\frac{3}{4}$$

*Para sumar fracciones que tienen **distinto denominador** debemos transformarlas en fracciones equivalentes para que tengan el mismo denominador, una vez hecho esto sumamos los numeradores de las fracciones resultantes.*

Recuerda

$$\frac{3}{10} \quad + \quad \frac{2}{5} \quad = \quad \frac{3}{10} \quad + \quad \frac{4}{10} \quad = \quad \frac{3+4}{10}=\frac{7}{10}$$

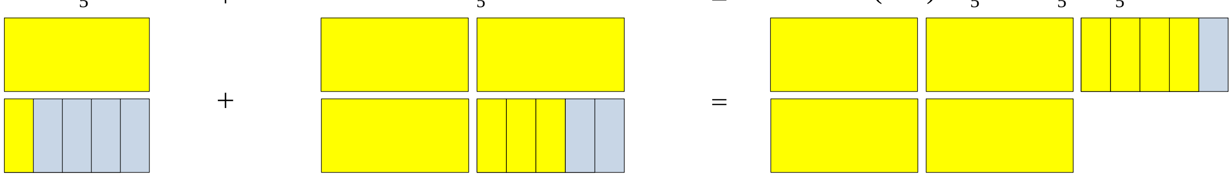


En el ejemplo anterior, sólo fue necesario trasformar $\frac{2}{5}$ a $\frac{4}{10}$, conservando la fracción $\frac{3}{10}$ sin modificación, sin embargo existen muchos casos en los que será necesario transformar ambas fracciones. Así mismo, podemos sumar más de dos fracciones siguiendo el mismo procedimiento.

Para **sumar** dos **fracciones mixtas** debemos sumar sus partes correspondientes por separado, es decir, por una parte sumamos los enteros y por otra las fracciones, siguiendo cualquiera de los procedimientos descritos anteriormente, dependiendo del caso (si las partes fraccionarias tienen el mismo denominador o no), finalmente expresamos el resultado como una fracción mixta.

Ejemplo 1:

$$1\tfrac{1}{5} \quad + \quad 3\tfrac{3}{5} \quad = \quad (1+3)+\tfrac{1+3}{5}=4+\tfrac{4}{5}=4\tfrac{4}{5}$$

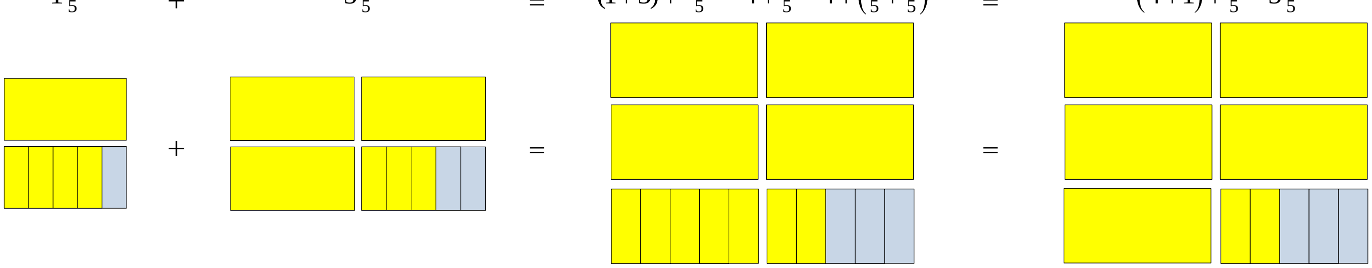


3

En el ejemplo anterior sumamos las partes enteras y las fraccionarias por separado, teniendo como caso específico fracciones con el mismo denominador.

Ejemplo 2:

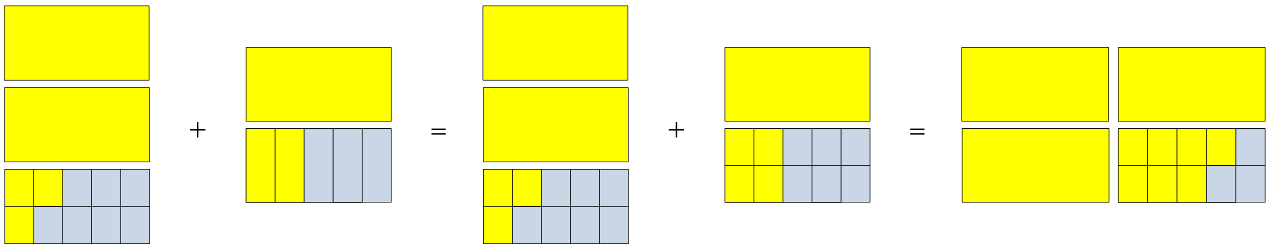
$$1\tfrac{4}{5} \quad + \quad 3\tfrac{3}{5} \quad = \quad (1+3)+\tfrac{4+3}{5}=4+\tfrac{7}{5}=4+\left(\tfrac{5}{5}+\tfrac{2}{5}\right) \quad = \quad (4+1)+\tfrac{2}{5}=5\tfrac{2}{5}$$



En el ejemplo anterior al sumar las partes fraccionarias de las fracciones mixtas nos resulta una fracción impropia ($\frac{7}{5}$), por lo que procedemos a “extraer” el entero ($\frac{5}{5}$) y sumarlo a la parte entera del resultado.

Ejemplo 3:

$$2\tfrac{3}{10} \quad + \quad 1\tfrac{2}{5} \quad = \quad 2\tfrac{3}{10} \quad + \quad 1\tfrac{4}{10} \quad = \quad (2+1)+\tfrac{3+4}{10}=3+\tfrac{7}{10}=3\tfrac{7}{10}$$



En el ejemplo anterior sumamos las partes enteras y las fraccionarias por separado, teniendo como caso específico fracciones con distinto denominador.

Actividad

Realiza las siguientes sumas de fracciones mixtas:

1) $1\frac{3}{4}+2\frac{2}{4}=$

2) $2\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}=$

3) $1\frac{1}{3}+4\frac{5}{6}=$

4) $7\frac{1}{8}+2\frac{1}{2}=$

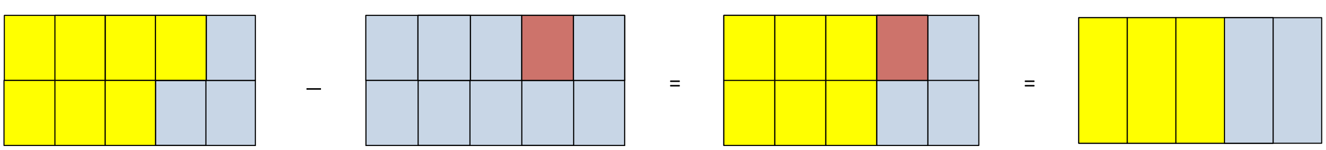
5) $2\frac{3}{4}+3\frac{5}{6}=$

Desarrolla una representación grafica de cada operación.

Resta de fracciones mixtas

Cuando restamos fracciones estamos sustrayendo la segunda fracción de la primera y, al igual que en el caso de la suma, asumimos que éstas son fracciones de una misma unidad o todo. El caso mas sencillo se presenta cundo restamos fracciones cuya unidad de referencia ha sido dividida en la misma cantidad de partes iguales, es decir, tienen el ***mismo denominador****; en este caso lo único que hay que hacer es restar las cantidades de los numeradores.*

Recuerda



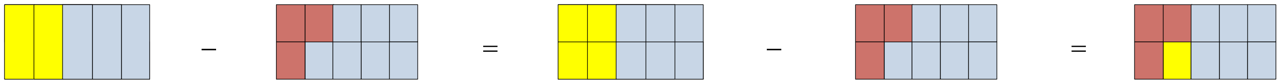
$$\frac{7}{10} \quad - \quad \frac{1}{10} \quad = \quad \frac{7-1}{10}=\frac{6}{10} \quad = \quad \frac{3}{5}$$

Observa cómo en el ejemplo anterior, para representar gráficamente la sustracción, “sobreponemos” las partes “rojas” del segundo rectángulo en el primero y el resultado son las partes “amarillas que se conservan; al final convertimos el resultado en una fracción equivalente con un denominador mas pequeño, frecuentemente cuando realizamos operaciones con fracciones es conveniente “simplificar” nuestros resultados a su forma más simple y esto implica convertirlos a la fracción equivalente con el numerador más pequeño que podamos obtener.

Para restar fracciones que tienen ***distinto denominador*** *debemos transformarlas en fracciones equivalentes para que tengan el mismo denominador, una vez hecho esto restamos los numeradores de las fracciones resultantes.*

Recuerda

$$\frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4-3}{10} = \frac{1}{10}$$

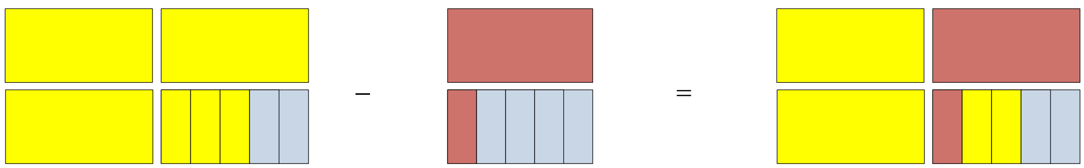


En este ejemplo tuvimos que convertir la primera fracción en una fracción equivalente que tuviera el mismo denominador que la segunda para poder efectuar la sustracción. Al sobreponer las partes "rojas" del segundo rectángulo en el primero, el resultado es sólo una parte "amarilla".

Para **restar** dos **fracciones mixtas** debemos restar sus partes correspondientes por separado, es decir, por una parte restamos los enteros y por otra las fracciones, siguiendo cualquiera de los procedimientos descritos anteriormente, dependiendo del caso (si las partes fraccionarias tienen el mismo denominador o no), finalmente expresamos el resultado como una fracción mixta.

Ejemplo 4:

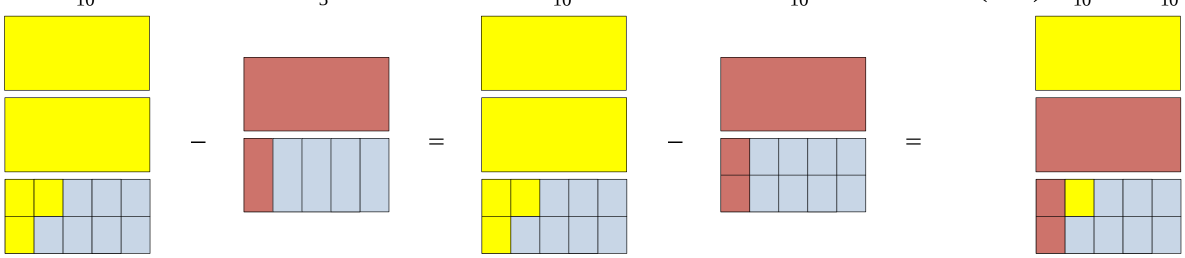
$$3\tfrac{3}{5} - 1\tfrac{1}{5} = (3-1)+\tfrac{3-1}{5} = 2+\tfrac{2}{5} = 2\tfrac{2}{5}$$



En el ejemplo anterior restamos las partes enteras y las fraccionarias por separado, teniendo como caso específico fracciones con el mismo denominador.

Ejemplo 5:

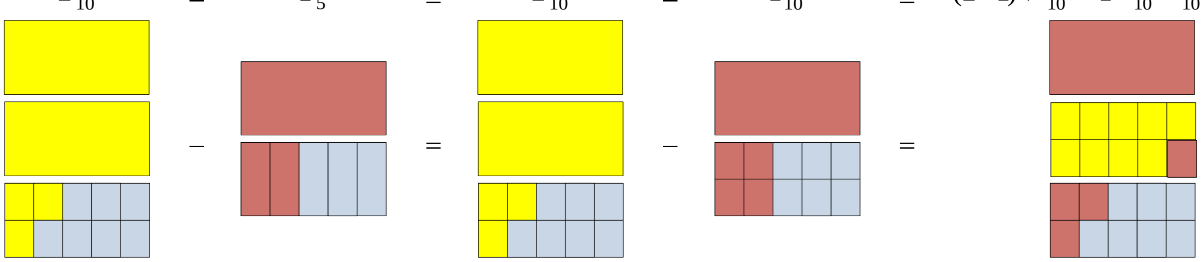
$$2\tfrac{3}{10} - 1\tfrac{1}{5} = 2\tfrac{3}{10} - 1\tfrac{2}{10} = (2-1)+\tfrac{3+2}{10} = 1+\tfrac{1}{10} = 1\tfrac{1}{10}$$



En el ejemplo anterior restamos las partes enteras y las fraccionarias por separado, teniendo como caso específico fracciones con distinto denominador.

Ejemplo 6:

$$2\tfrac{3}{10} - 1\tfrac{2}{5} = 2\tfrac{3}{10} - 1\tfrac{4}{10} = (2-1)+\tfrac{3-4}{10} = 1-\tfrac{1}{10} = \tfrac{10}{10}-\tfrac{1}{10} = \tfrac{9}{10}$$



En el ejemplo anterior al restar las partes fraccionarias de las fracciones mixtas nos resulta una fracción “negativa” ($-\frac{1}{10}$), por lo que procedemos a “fraccionar” la parte entera del resultado en décimos, para poder extraer de ella el décimo que nos está faltando por restar.

Actividad

Realiza las siguientes restas de fracciones mixtas:

1) $2\frac{2}{4}-1\frac{3}{4}=$

2) $3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}=$

3) $4\frac{5}{6}-1\frac{1}{3}=$

4) $7\frac{1}{8}-2\frac{1}{2}=$

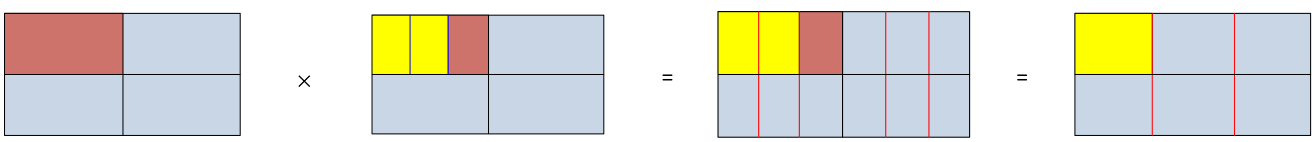
5) $3\frac{5}{6}-2\frac{3}{4}=$

Desarrolla una representación grafica de cada operación.

Multiplicación de fracciones mixtas

Recuerda

Cuando multiplicamos fracciones estamos dividiendo la primera fracción (de un entero) en tantas partes como lo indica el denominador de la segunda fracción y tomando el número de partes que nos indica el numerador de la segunda fracción. Como resultado obtenemos una nueva fracción respecto del entero original. Numéricamente este procedimiento lo realizamos multiplicando numerador con numerador y denominador con denominador.



$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1\times 2}{4\times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Observa cómo en el ejemplo anterior, para representar gráficamente la multiplicación, “dividimos” la parte “roja” de primer rectángulo (que representa la primera fracción) en tantas partes como nos indica el denominador de la segunda fracción y tomamos el número de partes que nos indica su numerador (partes “amarillas”). El resultado es una nueva fracción respecto del entero original, que al final convertimos en una fracción equivalente con un denominador más pequeño.

Para **multiplicar una fracción mixta por un entero** debemos convertir la fracción mixta en su correspondiente fracción impropia y multiplicar el entero por el numerador de la fracción, finalmente reducir el resultado a su expresión más sencilla.

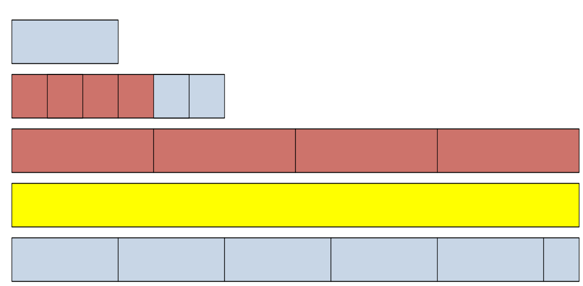
Ejemplo 7:

$$1\frac{1}{3}\times 4=\left(\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\right)\times 4=\frac{4}{3}\times 4=\frac{4\times 4}{3}=\frac{16}{3}=\frac{15}{3}+\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:

Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida. La fracción $1\frac{1}{3}$ (equivalente a $\frac{4}{3}$) nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo en tres partes iguales y considerar cuatro de éstas. Para ello necesitamos adicionar un rectángulo azul y tomar las cuatro terceras partes, quedándonos el rectángulo rojo.

El 4 nos indica que debemos considerar el rectángulo rojo cuatro veces. Para ello necesitamos adicionar tres rectángulos rojos, quedándonos el rectángulo amarillo.



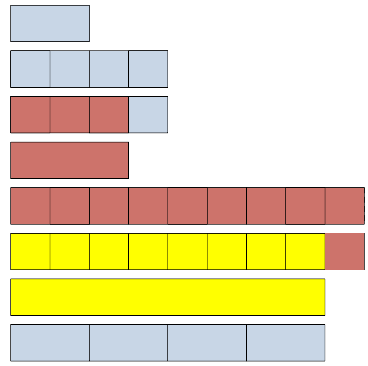
Finalmente, lo que nos indica el resultado es la equivalencia del rectángulo amarillo en rectángulos azules, en este caso el resultado es 5 rectángulos azules más $\frac{1}{3}$ de un rectángulo adicional.

Para **multiplicar** dos **fracciones mixtas** debemos convertirlas a sus correspondientes fracciones impropias y multiplicar numerador con numerador y denominador con denominador y finalmente reducir el resultado a su expresión más sencilla.

Ejemplo 8:

$$1\tfrac{1}{2}\times 2\tfrac{2}{3}=\left(\tfrac{2}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\times\left(\tfrac{6}{3}+\tfrac{2}{3}\right)=\tfrac{3}{2}\times\tfrac{8}{3}=\tfrac{3\times 8}{2\times 3}=\tfrac{24}{6}=4$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:



Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida. La fracción $1\frac{1}{2}$ (equivalente a $\frac{3}{2}$) nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo en dos partes iguales y considerar tres de éstas. Para ello necesitamos adicionar un rectángulo azul y tomar las tres medias partes, quedándonos el rectángulo rojo.

La fracción $2\frac{2}{3}$ (equivalente a $\frac{8}{3}$) nos indica que debemos dividir el rectángulo rojo en tres partes iguales y considerar ocho de éstas. Para ello necesitamos adicionar dos rectángulos rojos y tomar las ocho terceras partes, quedándonos el rectángulo amarillo.

Finalmente, lo que nos indica el resultado es la equivalencia del rectángulo amarillo en rectángulos azules, en este caso equivale a 4 rectángulos azules.

Actividad

Realiza las siguientes multiplicaciones de fracciones mixtas:

1) $2\frac{1}{3}\times 3=$

2) $3\frac{2}{3}\times 2=$

3) $2\frac{2}{3}\times 1\frac{3}{4}=$

4) $1\frac{1}{8}\times 2\frac{1}{2}=$

5) $3\frac{1}{6}\times 1\frac{3}{4}=$

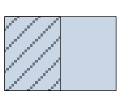
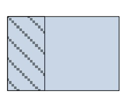
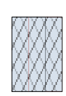
Desarrolla una representación grafica de cada operación.

División de fracciones mixtas

Recuerda

Cuando dividimos fracciones estamos considerando dos fracciones distintas de un mismo entero y determinando cuantas veces "cabe" la segunda fracción en la primera. Como resultado podemos obtener una cantidad entera o fraccionaria (propia o mixta), esto depende de la relación de magnitud que existe entre ambas fracciones, es decir de si la segunda fracción es mayor o menor en magnitud que la primera. Numéricamente este procedimiento lo realizamos multiplicando (en el numerador de nuestro resultado) el numerador de la primera fracción con el denominador de la segunda y multiplicando (en el denominador de nuestro resultado) el denominador de la primera fracción con el numerador de la segunda fracción.

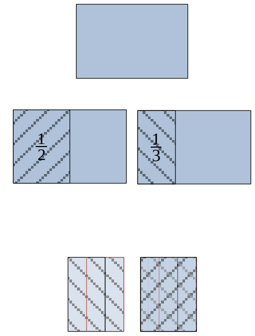
Veamos el siguiente caso:

 ÷  = 

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{1\times 3}{2\times 1}=\frac{3}{2}=1\tfrac{1}{2}$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:

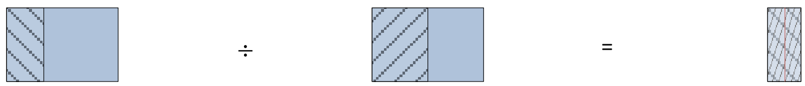
Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida.



La fracción $\frac{1}{2}$ nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo en dos partes iguales y considerar una de éstas. La fracción $\frac{1}{3}$ nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo en tres partes iguales y considerar una de éstas.

El resultado $\frac{3}{2}$ nos indica que debemos dividir la tercera parte que tomamos de nuestro entero de partida en dos partes iguales y tomar 3 de éstas, que son el número de veces que cabe $\frac{1}{3}$ del entero original en $\frac{1}{2}$ del entero original. Finalmente comprobamos que un tercio cabe una y media veces en un medio.

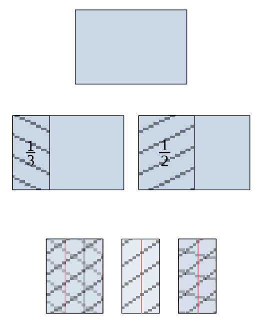
También podemos tener operaciones de división de fracciones como la siguiente:



$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{3\times 1} = \frac{2}{3}$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:

Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida.



La fracción $\frac{1}{3}$ nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo en tres partes iguales y considerar una de éstas. La fracción $\frac{1}{2}$ nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo en dos partes iguales y considerar una de éstas.

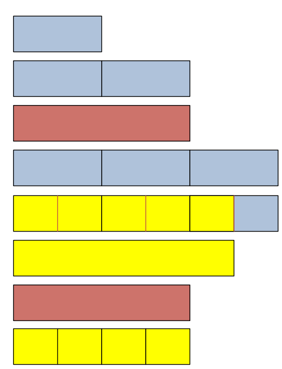
El resultado $\frac{2}{3}$ nos indica que debemos dividir la media parte que tomamos de nuestro entero en tres partes iguales y tomar 2 de éstas. Finalmente comprobamos que dos terceras partes de un medio de nuestro entero original caben en un tercio de nuestro entero original.

Para **dividir un entero entre una fracción mixta** debemos convertir la fracción mixta en su correspondiente fracción impropia y proceder como en la división de fracciones agregando como denominado la unidad al entero.

Ejemplo 9:

$$2 \div 2\frac{1}{2} = 2 \div \frac{5}{2} = \frac{2}{1} \div \frac{5}{2} = \frac{2\times 2}{1\times 5} = \frac{4}{5}$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:



Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida. El 2 nos indica que debemos tomar dos rectángulos. Para ello necesitamos adicionar un rectángulo azul, quedándonos el rectángulo rojo.

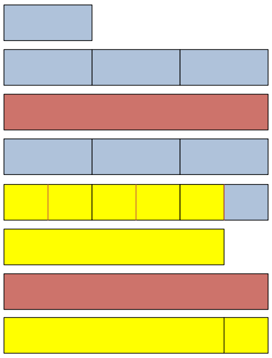
La fracción $2\frac{1}{2}$ (equivalente a $\frac{5}{2}$) nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo original en dos partes iguales y considerar cinco de éstas. Para ello necesitamos adicionar dos rectángulos azules y tomar las 5 medias partes, quedándonos el rectángulo amarillo.

El resultado nos indica que sólo cuatro quintas partes de la fracción $2\frac{1}{2}$ (rectángulo amarillo) caben en 2 unidades (rectángulo rojo).

Ejemplo 10:

$$3 \div 2\tfrac{1}{2} = 3 \div \tfrac{5}{2} = \tfrac{3}{1} \div \tfrac{5}{2} = \tfrac{3\times 2}{1\times 5} = \tfrac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5}$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:



Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida. El 3 nos indica que debemos tomar tres rectángulos. Para ello necesitamos adicionar dos rectángulos azules, quedándonos el rectángulo rojo.

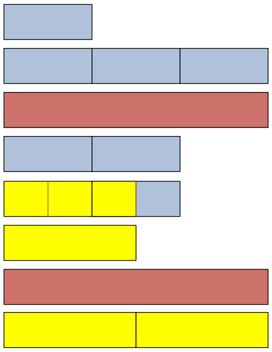
La fracción $2\frac{1}{2}$ (equivalente a $\frac{5}{2}$) nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo original en dos partes iguales y considerar cinco de éstas. Para ello necesitamos adicionar dos rectángulos azules y tomar las 5 medias partes, quedándonos el rectángulo amarillo.

El resultado nos indica que una fracción equivalente a $2\frac{1}{2}$ rectángulos azules (rectángulo amarillo) cabe $1\frac{1}{5}$ veces en 3 tres rectángulos azules (rectángulo rojo).

Ejemplo 11:

$$3 \div 1\tfrac{1}{2} = 3 \div \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{1} \div \tfrac{3}{2} = \tfrac{3\times 2}{1\times 3} = \tfrac{6}{3} = 2$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:



Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida. El 3 nos indica que debemos tomar tres rectángulos. Para ello necesitamos adicionar dos rectángulos azules, quedándonos el rectángulo rojo.

La fracción $1\frac{1}{2}$ (equivalente a $\frac{3}{2}$) nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo original en dos partes iguales y considerar tres de éstas. Para ello necesitamos adicionar un rectángulo azul y tomar las 3 medias partes, quedándonos el rectángulo amarillo.

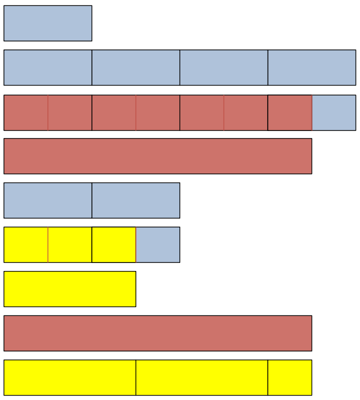
El resultado nos indica que una fracción equivalente a $1\frac{1}{2}$ rectángulos azules (rectángulo amarillo) cabe 2 veces en 3 tres rectángulos azules (rectángulo rojo).

Para **dividir** dos **fracciones mixtas** debemos convertirlas a sus correspondientes fracciones impropias y proceder como en la división de fracciones.

Ejemplo 12:

$$3\tfrac{1}{2} \div 1\tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{2} \div \tfrac{3}{2} = \tfrac{7\times 2}{2\times 3} = \tfrac{7}{3} = 2\tfrac{1}{3}$$

Podemos explicar gráficamente la operación y el resultado del ejemplo anterior de la siguiente manera:



Iniciamos con un rectángulo azul, que es nuestro entero de partida. La fracción $3\frac{1}{2}$ (equivalente a $\frac{7}{2}$) nos indica que debemos dividir nuestro rectángulo en dos partes iguales y considerar siete de éstas. Para ello necesitamos adicionar tres rectángulos azules y tomar las siete medias partes, quedándonos el rectángulo rojo.

La fracción $1\frac{1}{2}$ (equivalente a $\frac{3}{2}$) nos indica que debemos dividir el rectángulo azul en dos partes iguales y considerar tres de éstas. Para ello necesitamos adicionar un rectángulo azul y tomar las tres medias partes, quedándonos el rectángulo amarillo.

El resultado nos indica que una fracción equivalente a $1\frac{1}{2}$ rectángulos azules (rectángulo amarillo) cabe $2\frac{1}{3}$ veces un rectángulo equivalente a $3\frac{1}{2}$ rectángulos azules (rectángulo rojo).

Actividad

Realiza las siguientes restas de fracciones mixtas:

1) $3 \div 1\frac{1}{3} =$

2) $9 \div 3\frac{2}{2} =$

3) $4\frac{5}{6} \div 1\frac{1}{3} =$

4) $2\frac{2}{4} \div 1\frac{3}{4} =$

5) $3\frac{2}{3} \div 2\frac{1}{3} =$

Desarrolla una representación grafica de cada operación.

Cierre:

Antes de finalizar retomemos el problema de la introducción para solucionarlo:

El papá de Jorge se dedica a pintar casas y ha calculado que ocupa $5\frac{1}{2}$ cubetas de 15 litros para un trabajo que le han solicitado. Si el recipiente que utiliza para trabajar tiene una capacidad de $3\frac{3}{4}$ litros, ¿Cuántas veces tendrá que llenar su recipiente para terminarse la pintura?

Si analizas los datos que nos dan en el problema (y cómo estos se relacionan), notarás que para llegar a la respuesta debemos realizar dos operaciones que implican fracciones mixtas:

1) Multiplicar $5\frac{1}{2}$ cubetas por 15 litros cada una para obtener el número total de litros.

$$5\frac{1}{2} \times 15 = \frac{11}{2} \times \frac{15}{1} = \frac{11 \times 15}{2} = \frac{165}{2} = 82\frac{1}{2}$$

2) Dividir el número total de litros entre $3\frac{3}{4}$ litros, que es la capacidad del recipiente, para obtener el número veces que se tendrá que llenar el recipiente.

$$82\frac{1}{2} \div 3\frac{3}{4} = \frac{165}{2} \div \frac{15}{4} = \frac{165 \times 4}{2 \times 15} = \frac{660}{30} = 22$$

Entonces la respuesta al problema es que el recipiente **se llena 22 veces el recipiente** hasta terminarse la pintura.

En este tema te hemos presentado la manera en que se desarrollan las operaciones aritméticas cuando tenemos cantidades dadas como fracciones mixtas. Para ello describimos lo que es una fracción mixta y, conforme fuimos presentando el procedimiento para realizar cada una de las operaciones con este tipo de cantidades, recordamos el significado de cada una de ellas dentro del conjunto de los números fraccionarios. Finalmente pudiste notar la utilidad de este tipo de operaciones pues existen problemas que implican desarrollar operaciones con cantidades que en la vida cotidiana se nos presentan como fracciones mixtas.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://ntic.educacion.es/w3//recursos/primaria/matematicas/fracciones/menu.html
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_194_g_3_t_1.html?from=topic_t_1.html
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_106_g_3_t_1.html?from=topic_t_1.html
http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/fractions/frac_right.xhtml

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. El papá de Jorge pintó una cerca el pasado fin de semana. Para ello ocupó pintura de una cubeta llena, cuya capacidad es de $18\frac{1}{2}$ litros. Si el sábado gastó $3\frac{1}{4}$ litros de pintura y el domingo gastó $4\frac{1}{2}$ litros de pintura, ¿cuántos litros de pintura le quedaron en la cubeta?

A) $7\frac{1}{4}$

B) $7\frac{3}{4}$

C) $10\frac{1}{4}$

D) $10\frac{3}{4}$

2. Martha invitó a sus compañeros de clase a festejar su cumpleaños en su casa. Para ofrecerles algo de tomar compro 5 refrescos de $1\frac{1}{4}$ litros. Si sirvió un vaso de refresco de $\frac{1}{4}$ de litro a cada uno de sus invitados y al final le quedaron $1\frac{3}{4}$ litros de refresco, ¿cuántos invitados tuvo Martha en su fiesta?

A) 15

B) 18

C) 19

D) 25

3. Para ver un partido de la selección mexicana, un grupo de amigos deciden encargar pizzas para comer. Al finalizar el partido uno de ellos observa que en total han comido $2\frac{1}{4}$ pizzas. Si cada pizza estaba dividida en 8 rebanadas iguales y cada uno de los amigos comió tres rebanadas, ¿cuántos amigos se reunieron para ver el partido?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9

4. Jorge durmió el lunes $8\frac{1}{2}$ horas; el martes $7\frac{1}{4}$ horas; el miércoles $6\frac{1}{6}$ horas; el jueves $5\frac{2}{6}$ horas y el viernes $7\frac{4}{8}$ horas. ¿Cuántas horas durmió Jorge en total?

A) $33\frac{1}{4}$

B) $33\frac{3}{4}$

C) $34\frac{1}{4}$

D) $34\frac{3}{4}$

5. Juana organizó una fiesta en la que además de comida ofreció $26\frac{1}{4}$ litros de agua fresca, la sirvió en jarras que contenían $3\frac{3}{4}$ litros cada una y colocó una en cada mesa para que los invitados se sirvieran solos. Si ocupó toda el agua, ¿cuántas mesas había en total?

A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

TEMA 2. NÚMEROS CON SIGNO

Bloque IV

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

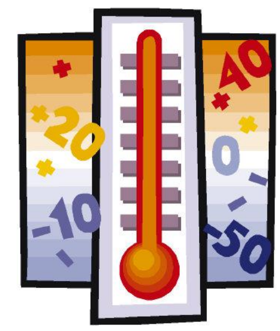
Tema: Significado y uso de los números

Subtema: Números con signo

Resultado general de aprendizaje: Plantea y resuelve problemas que impliquen la utilización de números con signo.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que impliquen el cálculo de variaciones de magnitudes con signo positivo y negativo.



Introducción:

En el pronóstico del tiempo mencionaron que las temperaturas máxima y mínima registradas el mes de enero de este año en el estado fueron de $31°C$ y $-6°C$, respectivamente, mientras que en el mismo mes del año pasado se registraron $33°C$ como máxima y $-5°C$ como mínima.

¿Cuál fue la variación de la temperatura en el mes de enero para los años 2011 y 2012? ¿Existe alguna diferencia en las variaciones de temperatura del mes de enero de los años 2010 y 2012?

Si observas los datos que se indican en la situación anterior, notarás que dos de las temperaturas dadas tienen signo negativo. Para poder responder las preguntas planteadas necesitarás saber cómo se encuentra la “distancia” que hay entre dos magnitudes cuando una de estas es negativa, a esta distancia se le conoce como *variación* de la magnitud.

Desarrollo:

Existen muchas situaciones en las que además de utilizar cantidades dadas en números naturales, aparecen otro tipo de números conocidos como **números negativos**. Por ejemplo la utilidad diaria de una tienda se calcula a partir de sus “gastos” y sus “ventas”; un termómetro ambiental puede medir temperaturas “sobre” cero y “bajo” cero; en una bahía un faro puede encontrarse a unos metros de distancia “sobre” el nivel del mar mientras que un buzo puede estar explorando cavernas a unos cuantos metros “bajo el nivel del mar.

A continuación te presentamos la manera en que se desarrollan algunos cálculos aritméticos cuando tratamos de determinar la “distancia” o **variación** que existe entre dos magnitudes enteras, cuando al menos una de ellas presenta signo negativo y, como parte final, introduciremos el concepto de **valor absoluto** de una cantidad entera positiva o negativa.

Recuerda

*Un **número natural** es cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos.*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

*Algunos matemáticos consideran al **cero** como un número natural, mientras que otros no, sin embargo nosotros lo consideraremos dentro de este conjunto de números puesto que, si los números naturales se utilizan para contar objetos, el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos.*

Normalmente para sumar o restar cantidades consideramos sólo números enteros positivos, es decir, números naturales, sin embargo, en muchas situaciones cotidianas podemos encontrarnos con la necesidad de obtener diferencias de cantidades en las que una de ellas aparece con signo negativo. En este tipo de casos estamos tratando con un conjunto de números diferente al conjunto de los números naturales, nos referimos al **conjunto de los números enteros**.

Los **números enteros** son un conjunto de números que incluye a los números naturales distintos de cero $(1,2,3,\ldots)$, los negativos de los números naturales $(\ldots,-3,-2,-1)$ y al cero, 0.

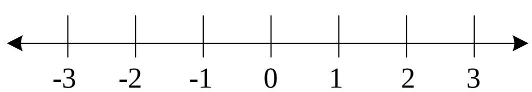
Los enteros negativos, como -1 ó -3 (se leen "menos uno", "menos tres", etc.), son menores que todos los enteros positivos $(1,2,3,\ldots)$ y que el cero.

Para resaltar la diferencia entre positivos y negativos, en ocasiones se escribe un signo $+$ "mas" delante de los positivos: $+1,+3,$ etc. Cuando no se le escribe signo al número se asume que es positivo.

Al igual que con los números naturales, con los números enteros podemos efectuar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de manera similar a los primeros. Sin embargo, en el caso de los enteros es necesario calcular también el signo del resultado. En este tema sólo presentaremos la forma en que podemos obtener la variación o distancia existente entre una cantidad positiva y una negativa, que es el caso particular de la restar a un entero positivo una cantidad negativa.

Variación de magnitudes en la recta numérica

En matemáticas se usa la recta numérica para ubicar los números enteros. Primeros se ubica en la parte central de la recta al cero, después los enteros positivos se ubican a la derecha del cero y los números negativos se ubican a la izquierda del cero.

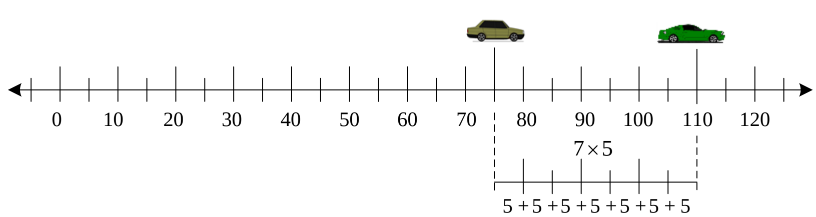


Nota que sólo a los números negativos se les coloca el signo $-$ "menos", asumiendo que los números que no tienen ningún signo son números positivos por encontrarse a la derecha del cero.

Cuando queremos conocer la variación (diferencia o distancia) que hay entre dos cantidades podemos hacer lo siguiente:

1. Ubicar ambas cantidades en la recta numérica
2. Determinar la distancia que hay entre ambas cantidades en la recta numérica.

Por ejemplo, si en una carretera un automóvil viaja a 75 km/hr y es rebasado por otro que viaja a 110 km/hr, ¿cuál es la diferencia entre las velocidades de ambos automóviles?



En este caso tenemos dos cantidades positivas que hemos ubicado en la recta numérica. Para determinar su diferencia sumamos el número de espacios que hay entre las dos cantidades de acuerdo a la escala de la recta, en este caso son 7 los espacios y cada uno equivale a 5 unidades (km/hr), por lo que determinamos que la diferencia entre las velocidades es:

$$5+5+5+5+5+5+5=35 \text{ km/hr} \qquad \text{ó} \qquad 7\times 5=35 \text{ km/hr}$$

Para hacer este tipo de cálculos sin recurrir a la recta numérica debemos siempre restar la cantidad menor a la cantidad mayor (nota que la cantidad mayor siempre será la que aparezca más a la derecha de la recta numérica), de manera que la diferencia entre las velocidades nos queda como:

$$110-75=35 \text{ km/hr}$$

¿Qué sucede con la variación cuando una de las cantidades es negativa?

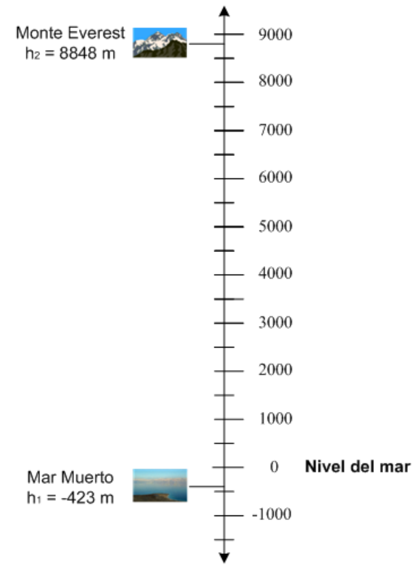
Para describir este caso consideremos la siguiente situación:

Si la altura del Monte Everest es 8848 metros por encima del nivel del mar, y por el contrario, la orilla del Mar Muerto está 423 metros por debajo del nivel del mar, es decir, su altura se puede expresar como -423 *m, ¿cuál es la diferencia en la altura del Monte Everest respecto del Mar Muerto?*

Podemos hacer una representación de la situación anterior con una recta numérica vertical como la de la derecha, sin embargo la escala empleada no nos permite determinar la diferencia entre las alturas de manera gráfica, como lo hicimos con las velocidades de los automóviles. En este caso recurrimos a hacer aritméticamente la resta de las altura

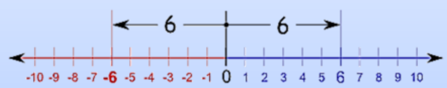
$$h_2-h_1=8845\text{ m}-(-423\text{ m})=8845\text{ m}+423\text{m}=9268\text{ m}$$

Observa como este tipo de operaciones se convierten en realidad en una suma ya que para obtener la diferencia de alturas debemos encontrar la distancia que hay entre ambas cantidades y esto se hace sumando a las distancias que hay desde el cero a las alturas h_1 y h_2.



Valor absoluto

La distancia de un número al cero en la recta numérica es la longitud del segmento que va del cero al número. A esta longitud se le llama **valor absoluto**, y se representa por medio de dos barras paralelas $|\ |$. Por ejemplo:



El "6" está a 6 de cero, y el "-6" también está a 6 de cero. Así que el valor absoluto de 6 es 6, y el valor absoluto de -6 también es 6.

$$|6|=6 \quad ; \quad |-6|=6$$

Observa en el ejemplo anterior que tanto 6 como -6 tienen el mismo valor absoluto, esto quiere decir que son **números simétricos**. En general se dice que dos números son simétricos si tienen diferente signo y se encuentran a la misma distancia del cero.

Actividad

1. En una recta numérica ubica los siguientes números y sus correspondientes números simétricos.

$$\begin{array}{ccc} -6 & 11 & 5 \\ 15 & -9 & 2 \\ 7 & -3 & -10 \end{array}$$

2. Determina la diferencia que existe entre cada una de las siguientes parejas de números:

9 y 3; 15 y 10; 11 y -2; 6 y -7; -15 y -2

A manara de conclusión podemos decir que:

La diferencia o variación de dos cantidades o magnitudes del mismo signo equivale al valor absoluto de la diferencia de los valores absolutos de la cantidad mayor menos la cantidad menor.

La diferencia o variación de dos cantidades o magnitudes con distinto signo equivale a la suma de los valores absolutos de ambas cantidades.

Cierre: Antes de finalizar retomemos el problema de la introducción para solucionarlo:

En el pronóstico del tiempo mencionaron que las temperaturas máxima y mínima registradas el mes de enero de este año en el estado fueron de $31°C$ ***y*** $-6°C$***, respectivamente, mientras que en el mismo mes del año pasado se registraron*** $33°C$ ***como máxima y*** $-5°C$ ***como mínima.***
¿Cuál fue la variación de la temperatura en el mes de enero para los años 2011 y 2012? ¿Existe alguna diferencia en las variaciones de temperatura del mes de enero de los años 2012 y 2012?

Para responder a la primera pregunta debemos calcular la variación de la temperatura en cada año y, al contar en ambos casos con temperaturas de distinto signo, sumamos sus valores absolutos.

2010 ⇨ $\left(T_{\max}-T_{mín}\right)_{2010}=|33|°C+|-5|°C=33°C+5°C=38°C$

2011 ⇨ $\left(T_{\max}-T_{mín}\right)_{2011}=|31|°C+|-6|°C=31°C+6°C=37°C$

Ahora que tenemos las variaciones de cada año procedemos a calcular la diferencia entre estas y; al ser ambas cantidades positivas, nuestro resultado es igual a su diferencia.

$$\left(T_{\max}-T_{mín}\right)_{2010}-\left(T_{\max}-T_{mín}\right)_{2011}=38°C-37°C=1°C$$

En este tema te hemos presentado la manera en que se desarrollan algunos cálculos aritméticos cuando tratamos de determinar la "distancia" o **variación** que existe entre dos magnitudes enteras, cuando al menos una de ellas presenta signo negativo.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/unid-3/numeros-enteros1.htm
http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/unid-4/numeros-enteres2.htm

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Se desea tender un cable vertical desde la azotea de un edificio de 7 pisos hasta el sótano del mismo. Si se sabe que la salida para el cable que hay en el sótano se encuentra a $7\,\mathrm{m}$ por debajo del suelo y cada piso tienen una altura de $5\,\mathrm{m}$, ¿cuál es la longitud mínima que debe tener el cable?

A) $12\ \mathrm{m}$

B) $28\ \mathrm{m}$

C) $35\ \mathrm{m}$

D) $42\ \mathrm{m}$

2. Existen en el planeta varios sitios ubicados a una altura por debajo del nivel del mar. Por ejemplo el Mar de Galilea en Israel se encuentra a $-208\,\mathrm{m}$ del nivel del mar, mientras que el Mar Caspio en Asia se ubica a $-28\,\mathrm{m}$ del nivel del mar. ¿Cuál es la variación en las alturas entre estas dos localidades del planeta?

A) $-180\ \mathrm{m}$

B) $180\ \mathrm{m}$

C) $-236\ \mathrm{m}$

D) $236\ \mathrm{m}$

3. Un día en el desierto se registro una temperatura de $52\ ^\circ\mathrm{C}$ en la tarde y en la noche el termómetro marco $-15\ ^\circ\mathrm{C}$. ¿Cuál es la diferencia entre estas temperaturas?

A) $37\ ^\circ\mathrm{C}$

B) $-37\ ^\circ\mathrm{C}$

C) $67\ ^\circ\mathrm{C}$

D) $-67\ ^\circ\mathrm{C}$

4. Ciudad Madera, ubicada al Noreste del estado de Chihuahua es considero uno de los puntos más fríos del país y en el pasado invierno registró una temperatura mínima de $-11\ ^\circ\mathrm{C}$, considerada la temperatura mas baja del año en todo el país. Por otra parte, ciudad de Mexicali fue la que registró una mayor temperatura en el país durante el verano pasado. Si la variación de las temperaturas máxima y mínima en el país el año pasado fue de $59\ ^\circ\mathrm{C}$, ¿Cuál fue la temperatura máxima registrada en Mexicali el verano pasado?

A) $70\ ^\circ\mathrm{C}$

B) $48\ ^\circ\mathrm{C}$

C) $-48\ ^\circ\mathrm{C}$

D) $-70\ ^\circ\mathrm{C}$

5. En una fotografía tomada desde un crucero en el mar se observa un faro que se encuentra en un acantilado de aproximadamente $105\,\mathrm{m}$ de altura sobre el nivel del mar. Si se sabe que la cubierta del crucero se encuentra aproximadamente a $20\,\mathrm{m}$ del nivel del mar, ¿Cuál es la variación entre la altura a la que se encuentra el faro y la altura de cubierta del crucero desde dónde fue tomada la foto?

A) $-85\ \mathrm{m}$

B) $85\ \mathrm{m}$

C) $-125\ \mathrm{m}$

D) $125\ \mathrm{m}$

TEMA 3. POTENCIAS Y RAIZ CUADRADA

Bloque IV

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

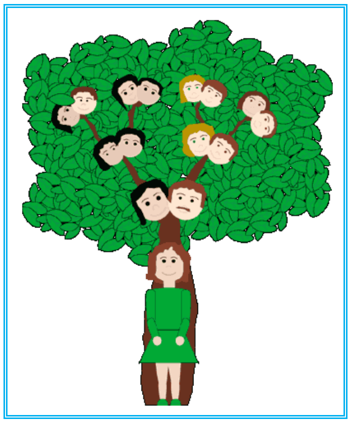
Tema: Significado y uso de las operaciones

Subtema: Potenciación y radicación

Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y potencias de números naturales y decimales.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que impliquen el cálculo de una potencia natural o la raíz cuadrada de un número natural.



Introducción:

Claudia estuvo conversando con sus papás sobre sus antepasados y durante la conversación sus papás le enseñaron una fotografía de cada uno de sus abuelos, bisabuelos y tatarabuelos. ¿Cuántas fotografías vio en total Claudia?

Existen varias formas de responder a la pregunta planteada en la situación anterior, sin embargo aquí te mostraremos una forma muy útil para representar numéricamente este tipo de situaciones y resolverlas de manera sencilla, para ello necesitarás aprender un poco sobre **potencias y raíces cuadradas de números naturales** que es lo que te presentaremos a continuación.

Desarrollo:

Para introducirnos en el concepto de potencia de un número natural considera la siguiente situación:

Los Cubos de Rubik son rompecabezas mecánicos en forma de cubo cuyas caras están compuestas por pequeños cubos y, cuando están resueltos, cada cara es de un mismo color. Existen principalmente cuatro versiones del cubo de Rubik,

- Cubo de bolsillo, conformado por 2 cubos de largo, 2 cubos de alto y 2 cubos de ancho, es decir **2×2×2** cubos en total.
- Cubo Estándar, conformado por 3 cubos de largo, 3 cubos de alto y 3 cubos de ancho, es decir **3×3×3** cubos en total.
- La venganza de Rubik, conformado por 4 cubos de largo, 4 cubos de alto y 4 cubos de ancho, es decir **4×4×4** cubos en total.
- Cubo del Profesor, conformado por 5 cubos de largo, 5 cubos de alto y 5 cubos de ancho, es decir **5×5×5** cubos en total.

Observa que, para expresar el número total de cubos que tienen las distintas versiones del cubo de Rubik hemos multiplicamos 3 veces el mismo número ya que, por tratarse de un cubo, sus tres dimensiones (largo, alto y ancho) miden exactamente lo mismo. Esto es equivalente a calcular el volumen de cada cubo.

Recuerda

El volumen de un cubo se calcula multiplicando su largo por su ancho por su alto y, como estas tres dimensiones son iguales, llamamos a cada una de ellas arista "a" del cubo; de manera que el volumen del cubo se calcula como:

$$V = a \times a \times a$$

Las multiplicaciones que hacemos cuando calculamos el volumen de un cubo tienen una singularidad, en todas se repite el mismo factor en la operación.

Potencias de números naturales

La operación que consiste en multiplicar un factor natural reiteradamente se denomina **potencia de números naturales** y ésta es un caso particular de la multiplicación de números naturales.

Cada multiplicación de factores reiterados puede escribirse en *notación de potencia*, así por ejemplo

$$4\times4\times4 \quad \text{se escribe } 4^3$$
$$6\times6\times6\times6 \quad \text{se escribe } 6^4$$
$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 \quad \text{se escribe } 2^7.$$

Los elementos que aparecen en la notación de potencias se identifican como:

$$5^{3} \longleftarrow \text{exponente}, \quad 5 \longleftarrow \text{base}$$

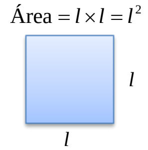
En el ejemplo anterior, al 5 se denomina base de la potencia, y es el factor que se reitera en la multiplicación; al 3 se denomina exponente de la potencia e indica el número de veces que se repite la base como factor. De esta forma, decimos que 5^3 es una "potencia de base 5 y exponente 3".

$$5^3 = 5\times5\times5 = 125$$

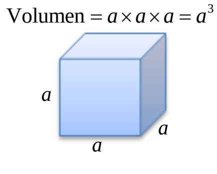
Existen otras formas más habituales de referirse a una potencia. Por ejemplo, 4^5 se puede leer "4 elevado a la quinta"; "4 a la quinta" o "la quinta potencia de 4". Lo de "elevado" hace referencia a que en la notación de potencias el exponente se escribe más alto que la base.

Cuando se trata de los exponentes 2 y 3 la lectura varía. Así, 5^2 se puede leer "la segunda potencia de 5", "5 elevado al *cuadrado*", "el *cuadrado* de 5" o "5 al *cuadrado*". Análogamente, 7^3 se puede leer "la tercera potencia de 7", "el *cubo* de 7", "7 elevado al *cubo*" o "7 al *cubo*".

El uso de los términos "cuadrado" y "cubo" para describir a la segunda y tercera potencia proviene de dos situaciones geométricas específicas:



- ☑ El área de un *cuadrado* se calcula mediante la potencia l^2, dónde l corresponde a la longitud del *lado* del cuadrado.



- ☑ El volumen de un *cubo* (como ya lo mencionamos) se calcula, mediante la potencia a^3, dónde a corresponde a la longitud de la *arista* del cubo.

Muchas veces, cuando necesitamos calcular el valor de una potencia, basta con hacer la multiplicación mentalmente, esto es fácil cuando la base o el exponente o ambos son pequeños. Por ejemplo, $2^5 = 32$, $10^2 = 100$, $3^2 = 9$, etc. Tu habilidad para realizar mentalmente el cálculo de potencias se incrementará conforme te vayas habituando más a ellas, mientras tanto puedes emplear un paso intermedio, esto es "expandir" la potencia escribiendo el producto de la base como factor tantas veces como nos lo indique el exponente, para después realizar el cálculo del producto.

$$12^2 = 12 \times 12 = 144$$
$$9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$$
$$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2041$$
$$4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$$

Actividad

Realiza la expansión de las siguientes potencias y calcula el producto final.

$11^2 =$

$6^3 =$

$5^4 =$

$3^5 =$

$2^6 =$

En ocasiones no basta con saber "leer" las potencias y calcular su valor cuando se nos presentan, por ejemplo, saber calcular la potencia 2^5 como $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. También resulta útil habituarnos a proceder en sentido inverso, es decir, a identificar las potencias cuando éstas se nos presentan desarrolladas. Por ejemplo, en el caso anterior, saber que 32 es la quinta potencia de 2.

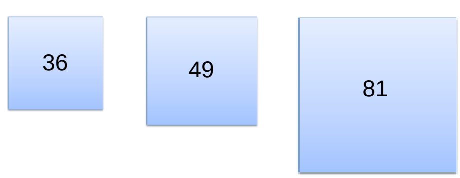
En relación a lo anterior, te presentamos en la tabla de la derecha la segunda y tercera potencia de los 10 primeros números enteros.

Número	Cuadrado	Cubo
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

Raíz cuadrada

Observa la tabla de arriba, haciendo un recorrido por los valores de la primera y segunda columna, podemos afirmar que 36 es el *cuadrado* de 6; 49 es el *cuadrado* de 7; 81 es el *cuadrado* de 9; etc. ¿Cómo podríamos interpretar geométricamente las afirmaciones anteriores?

Ya habíamos mencionado que cuando tratamos de potencias, el término "cuadrado" proviene de la situación geométrica de calcular el *área de un cuadrado* al elevar la longitud de su lado a la segunda potencia. Pero ¿qué tendríamos que hacer si en lugar de calcular el área de un cuadrado a partir de la longitud de su lado tuviéramos que calcular la longitud de su lado a partir del conocimiento de su área?



Los cuadrados anteriores nos muestran en su interior el valor numérico de su área, ¿Cuánto vale el lado de cada cuadrado? Como ya se mencionó antes, sabemos que 36 es la segunda potencia de 6, por lo que el lado del primer cuadrado es 6. Bajo el mismo razonamiento sabemos que los lados del segundo y tercer cuadrado son 7 y 9, respectivamente.

Cuando queremos saber la longitud del lado de un cuadrado a partir de su área realizamos una operación inversa a obtener la segunda potencia de un número; esta operación se conoce como **raíz cuadrada**.

En general, la raíz cuadrada de un número "**A**" es aquel número "**b**" que elevado al cuadrado nos da el número **A**. Lo anterior se simboliza de la siguiente manera:

$$\sqrt{A} = b \text{, sí y sólo sí } b^2 = A$$

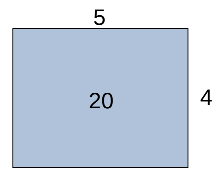
Por ejemplo:

$$\sqrt{16} = 4 \text{ porque } 4^2 = 16$$
$$\sqrt{36} = 6 \text{ porque } 6^2 = 36$$
$$\sqrt{49} = 7 \text{ porque } 7^2 = 49$$

En los ejemplos anteriores todos los número tienen una raíz cuadrada entera (4, 6 y 7 son números enteros), sin embargo no siempre es así y existen muchos números enteros cuya raíz cuadrada no es un entero. ¿Cómo calcularías la raíz cuadrada de 20?

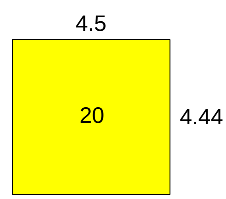
Podemos considerar varias alternativas para responder a lo anterior pues existen procedimientos aritméticos para calcular la raíz cuadrada, o podemos simplemente usar la calculadora. Aquí te presentamos un procedimiento geométrico para aproximar raíces cuadradas no enteras de números enteros.

Tenemos que encontrar la raíz cuadrada de 20, para ello partiremos de una figura que pertenece a la misma familia de los cuadrados por tener también cuatro lados, el rectángulo. La idea es irnos aproximando, a partir de un rectángulo de área igual a 20 a un cuadrado de la misma área "manipulando" sus lados.

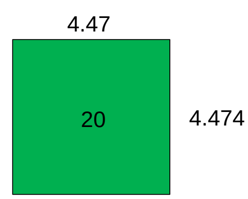


En rectángulo que tiene un área de 20 podría ser el que tiene un lado que mide 5 y otro que mide 4 (rectángulo azul).

Para hacer nuestra primera aproximación promediamos la medida de los lados del rectángulo $\frac{5+4}{2} = 4.5$.



Ahora construimos un rectángulo que tenga un lado igual a 4.5 y cuya área sea 20, para ello necesitamos determinar la medida del segundo lado del rectángulo y esto lo hacemos dividiendo el área entre el lado que ya tenemos, estos es $20 \div 4.5 = 4.44$. Nota que nuestro nuevo rectángulo (rectángulo amarillo) de lados 4.5 y 4.44 se aproxima ya mucho a un cuadrado.



Nuevamente promediamos la medida de los lados de nuestro rectángulo para construir un rectángulo más (rectángulo verde) y, a partir de este valor, calculamos el valor del segundo lado de manera que el área nos resulte igual a 20.

$$\frac{4.5+4.44}{2} = 4.47 \qquad ; \qquad 20 \div 4.47 = 4.474$$

El rectángulo verde es un rectángulo de lados 4.47 y 4.474 el cuál es prácticamente igual a un cuadrado de lado 4.47, podemos continuar con este procedimiento de acuerdo a la exactitud con la que queramos expresar nuestro resultado final, sin embargo consideramos que dos cifras decimales son suficientes por el momento, entonces podemos decir que

$$\sqrt{20} = 4.47$$

Actividad

Empleando el procedimiento geométrico mostrado, aproxima a dos cifras decimales la longitud del lado de los cuadrados que tienen un área de:

50 24 32

Ya que te hemos presentado algunos conceptos básicos sobre las operaciones de potencia y raíz cuadrada de números naturales estamos en condiciones de dar respuesta a la situación que planteamos en la introducción.

Claudia estuvo conversando con sus papás sobre sus antepasados y durante la conversación sus papás le enseñaron una fotografía de cada uno de sus abuelos, bisabuelos y tatarabuelos. ¿Cuántas fotografías vio en total Claudia?

Dividamos el problema en cuatro partes:

1. ¿Cuantos abuelos tiene Claudia?
   Como su papá y su mamá son 2 personas distintas y a cada uno le corresponde un papá y una mamá (2 personas distintas), entonces

   Claudia tiene $2^2 = 2\times2 = 4$ abuelos.

2. ¿Cuántos bisabuelos tiene Claudia?
   A cada abuelo de Claudia le corresponde un papá y una mamá (dos personas distintas), entonces

   Claudia tiene $2^3 = 2\times2\times2 = 8$ bisabuelos.

3. ¿Cuántos tatarabuelos tiene Claudia?
   A cada bisabuelo de Claudia le corresponde un papá y una mamá (dos personas distintas), entonces

   Claudia tiene $2^4 = 2\times2\times2\times2 = 16$ tatarabuelos.

4. ¿Cuántas fotos vio en total Claudia?
   Si Claudia vio una foto de cada una de estas personas entonces debemos sumar el número de abuelo, bisabuelos y tatarabuelos de Claudia para llegar ala respuesta.

$$4 \text{ abuelos} + 8 \text{ bisabuelos} + 16 \text{ tatarabuelos} = 28 \text{ fotos}$$

Cierre:

En este tema te hemos presentado algunos conceptos básicos sobre las operaciones de potencia y raíz cuadrada de números naturales y la forma en que éstas nos auxilian para resolver algunas situaciones que nos encontramos en la vida cotidiana. Como pudiste notar, el elevar un número al cuadrado y obtener la raíz cuadrada de un número son operaciones inversas ya que, si aplicamos a un número una operación y después la otra nos queda el número original.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www2.gobiernodecanarias.org/educacion/17/WebC/eltanque/laspotencias/inicio/potencias_p.html

http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/unid-5/potencias.htm

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. En la bodega de una papelería tienen 5 cajas con 5 paquetes de lápices cada una. Si en cada paquete hay 5 plumas, ¿cuántas plumas hay en total en la bodega?

A) 15

B) 25

C) 125

D) 625

2. Las bacterias son seres vivos minúsculos que se reproducen dividiéndose por la mitad cada cierto tiempo. Si un tipo de bacteria se divide cada minuto y en un experimento de cultivo de bacterias se comienza con una de estas bacterias, ¿Cuántas bacteria habrá al cabo de 8 minutos?

A) 32

B) 64

C) 128

D) 256

3. Lucía tiene un tablero de ajedrez con área de 441 centímetros cuadrados y necesita conocer cuanto mide cada lado del tablero para fabricar otros. ¿Cuántos centímetros mide dicho lado?

A) 21

B) 22

C) 30

D) 44

4. Juan trabaja en una fábrica de chocolates y tiene que empaquetar chocolates en cajas cuadradas de modo que haya el mismo número de chocolates en cada fila de la caja. ¿Cuántos bombones tendrá que colocar en cada fila si a una caja le caben un total de 196 chocolates?

A) 12

B) 14

C) 16

D) 18

5. Un carpintero tiene que hacer una mesa cuadrada de 5400 cm^2 de área, ¿Cuántos centímetros medirá cada lado de la mesa?

A) 60.0

B) 73.5

C) 80.0

D) 93.5

TEMA 4. CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Bloque IV

Eje temático: Forma, espacio y medida

Tema: Medida

Subtema: Estimar, medir y calcular

Resultado general de aprendizaje: Justifica y usa las fórmulas para calcular el perímetro o el área del círculo.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que impliquen calcular el área, perímetro o radio del círculo.

Introducción:

En el patio de la casa de José hay un tambo de forma cilíndrica en el que se almacena agua. En otoño caen muchas hojas de árbol al tambo, pues está descubierto, y por tal motivo el papá de José ha hecho una tapa circular de madera que cubre exactamente superficie superior del tambo.

José recordó que en la escuela recientemente había aprendido algunas cosas sobre las superficies circulares y se propuso determinar el perímetro de la tapa que hizo su papá y la superficie que ésta cubre. ¿A qué resultados llegó José si encontró que el diámetro de la tapa del tambo medía 1.4 m?

Observa que en el problema se menciona que el tambo tiene forma cilíndrica y, por tanto, que la tapa es *circular*. También, se menciona que lo que cubre la tapa es una superficie y que, para determinar esta *superficie circular*, José midió el *diámetro* de la tapa. En geometría existe una relación muy estrecha entre tres conceptos que están implícitos en este problema, lo cuales son **circunferencia, círculo y radio**. A continuación te presentaremos como se relacionan estos tres conceptos y te mostraremos su utilidad para resolver una gran variedad de problemas o situaciones en la vida cotidiana.

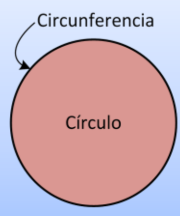
Desarrollo:

A continuación te presentamos los conceptos de **circunferencia, círculo y radio** y cómo es que éstos se relacionan en la geometría a través del famoso número "pí" (π). También te mostraremos la utilidad de estos conceptos geométricos para resolver problemas en la vida cotidiana, cuando requerimos determinar la longitud (**perímetro**) de una circunferencia o la superficie (**área**) que cubre un círculo.

Es común que cuando hablamos de objetos "redondos" consideremos los conceptos de circunferencia y círculo como sinónimos, sin embargo, aunque están estrechamente relacionados, éstos son dos conceptos distintos.

La **circunferencia** se define como una *línea* formada por todos los puntos de un plano que "equidistan" (están a la misma distancia) de un mismo punto llamado *centro* de la circunferencia. Así pues, estamos hablando de una línea cerrada.

El **círculo**, es justamente la región dentro del plano que se encuentra al interior de una circunferencia.



Puedes darte cuenta que estos dos conceptos están ligados, es decir, todo círculo determina una circunferencia y toda circunferencia determina un círculo. Aun así, es importante que distingas que el círculo es una región del plano y que la circunferencia es una línea.

El compás es un instrumento muy útil para trazar circunferencias y delimitar círculos. Toma tu compás con cierta abertura, ya sea 2 cm, 4 cm, etc., con esto puedes obtener círculos de diferentes tamaños.

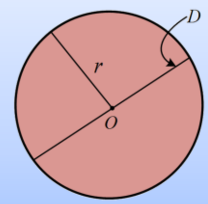
Recuerda

Elementos principales en una circunferencia

El **centro** de una circunferencia es el punto fijo de la cual “equidistan” todos los puntos de la circunferencia. Normalmente se denota con la letra O.

Se denomina **radio** al segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. Se acostumbra a denotarlo con la letra r.

El **diámetro** es el segmento de recta que pasa por el centro de la circunferencia y tiene como extremos dos puntos de la circunferencia. Es comúnmente denotado por la letra D.



De lo anterior podemos deducir entonces que:

1. Toda circunferencia queda completamente determinada al conocerse su centro y el radio.
2. El diámetro mide dos veces la longitud del radio, $D = 2r$.
3. El diámetro divide al círculo en dos partes iguales.

Como la circunferencia delimita una *región en el plano* conocida como círculo, podemos calcular su perímetro (longitud) y su área (superficie) empleando las fórmulas adecuadas, al igual que hacemos con otras figuras planas como el triángulos, cuadriláteros o polígonos.

Antes de presentar las fórmulas para calcular el perímetro de una circunferencia y el área del círculo que ésta delimita, definiremos un número que es de suma importancia en las matemáticas y que es indispensable cuando realizamos cálculos relacionados con circunferencia y círculos, el famoso número “pí” (π).

El número π

Existe una cantidad constante que obtenemos al relacionar la longitud y el diámetro de cualquier circunferencia. Esta cantidad constante se obtiene dividiendo la longitud de la circunferencia entre la medida del diámetro correspondiente, por lo que se trata de una razón.

“Pi” es el número que se define como la razón de la longitud de una circunferencia y la de su diámetro. Esta razón tiene un valor constante no exacto 3.141592... y se designa con una letra griega π.

$$\pi = \frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{longitud\ del\ diámetro} = 3.141592...$$

Conviene observar que π tiene infinitas cifras decimales que no forman ningún período, por lo que se considera como un número *irracional*.

Recuerda

*Un **número irracional** es un número que no se puede escribir en fracción y la parte decimal no sigue ningún patrón, es decir, las cifras decimales siguen indefinidamente sin repetirse.*

Actualmente muchos matemáticos investigan sobre las cifras del número π y se han calculado millones de cifras de su parte decimal. Sin embargo, para reducir los cálculos tomaremos el valor aproximado de π como **3.1416**.

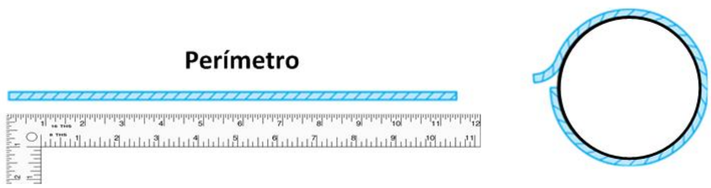
Hacia el 215 a.C. ***Arquímedes de Siracusa*** *(287 a.C.) escribió la obra "Sobre la medida del círculo", en la cual llegó a calcular una aproximación de un círculo por un polígono de 96 lados, y concluye que* π *está entre 3.1412989 y 3.1428265, la mejor aproximación de su tiempo y una de las mejores de toda la historia.*

Recuerda

Perímetro de la circunferencia

Dado que la circunferencia es una *línea cerrada* formada por todos los puntos de un plano que "equidistan" de un mismo punto llamado centro, la longitud de esta línea cerrada se denomina **perímetro de la circunferencia**.

Una manera de determinar el *perímetro de una circunferencia* consiste en "rectificarla", es decir, transformarla en un segmento rectilíneo y con una regla determinar su medida exacta. O bien, podemos abarcar con un hilo flexible una circunferencia y medir luego la longitud del hilo estirado, como se muestra en la figura.



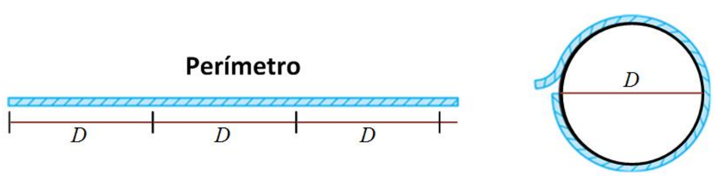
Sin embargo, no siempre es posible hacer este procedimiento y debemos buscar otras formas para calcular el perímetro de una circunferencia.

Hemos visto que π representa la constante universal que nos da la razón de la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro. Es por lo tanto el factor por el que hay que multiplicar la longitud del diámetro D de una circunferencia para calcular perímetro, que denotaremos como P.

$$\pi = \frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{longitud\ del\ diámetro} = \frac{P}{D}$$

$$P = \pi D$$

De la fórmula anterior podemos afirmar que el perímetro P de cualquier circunferencia equivale a π (3.1416) veces la longitud de su diámetro D.



Dicho de otra forma, "el diámetro de cualquier circunferencia cabe 3.1416 veces en su perímetro".

Como sabemos que el diámetro de una circunferencia equivale a dos veces el radio, $D = 2r$, también podemos calcular el perímetro de una circunferencia conociendo el valor del radio mediante la siguiente fórmula

$$P = 2\pi r$$

Por otra parte, si lo que queremos es calcular la longitud del *diámetro* o del *radio* de la circunferencia, deberemos despejar estas variables de las fórmulas correspondientes

$$D = \frac{P}{\pi} \qquad ; \qquad r = \frac{P}{2\pi}$$

Ejemplo 1:

Se van a hacer unos dulceros para una fiesta infantil forrando con papel latas vacías de leche en polvo. Para recortar las piezas de papel se requiere saber la longitud de la circunferencia de las latas. ¿Cuánto mide esta longitud si se sabe que las latas tienen un radio de 6.5 cm?

Para encontrar la respuesta podemos emplear cualquiera de las fórmulas que tenemos para calcular el perímetro de una circunferencia.

Si empleamos la fórmula $P=\pi D$, debemos de multiplicar la magnitud del radio por 2, pues sabemos que $D=2r$. Por lo tanto, como $r=6.5\text{ cm}$, entonces $D=2(6.5\text{ cm})=13\text{ cm}$, por lo que

$$\begin{aligned} P &= \pi D = 3.1416(13\text{cm}) \\ &= 40.84\text{ cm} \end{aligned}$$

Si empleamos la fórmula $P=2\pi r$, podemos utilizar directamente el dato que nos dan, es decir, la magnitud del radio, $r=6.5\text{ cm}$. Entonces

$$\begin{aligned} P &= 2\pi r = 2(3.1416)(6.5\text{ cm}) \\ &= 40.84\text{ cm} \end{aligned}$$

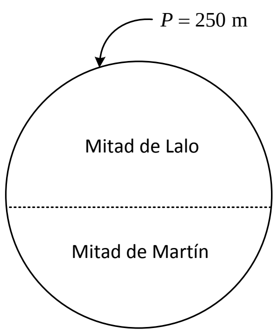
Observa que no importa cuál de las dos fórmulas utilicemos, llegaremos al mismo resultado siempre y cuando ambas fórmulas sean empleadas de manera correcta.

Ejemplo 2:

Don Miguel tiene cercado un terreno circular que tiene de perímetro 250 m y quiere repartirlo de forma equitativa entre dos de sus hijos Lalo y Martín. ¿Cuántos metros de malla necesita Don Miguel para dividir el terreno en dos partes iguales?

En ocasiones, cuando tenemos que resolver un problema que implique utilizar las matemáticas, es recomendable representarlo por medio de un esquema o dibujo. En la siguiente figura te mostramos una representación de este problema.

Nota que la línea punteada corresponde al diámetro de la circunferencia que delimita el terreno, pues sabemos que el diámetro divide al círculo en dos partes iguales. Por lo tanto en el problema nos piden encontrar el diámetro del terreno, sabiendo que éste tiene un perímetro $P=250\text{ m}$. Así que, despejando D de la fórmula para el perímetro de una circunferencia $P=\pi D$, tenemos que



$$D=\frac{P}{\pi}=\frac{250\text{ m}}{3.1416}=79.58\text{ m}$$

Área del círculo

Al igual que sucede con otras figuras planas como triángulos, cuadriláteros y polígonos, los círculos abarcan una determinada superficie en el plano.

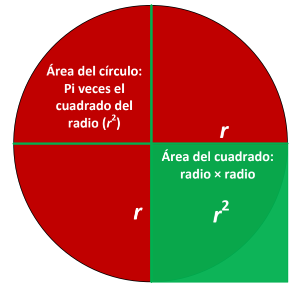
Se llama área de una figura plana a la medida de la superficie que ocupa. El **área del círculo** A se halla multiplicando π por el cuadrado del radio r.

$$A=\pi r^2$$

Recuerda

Mientras ***el perímetro es la medida del contorno*** *de una figura,* ***el área es la medida de la superficie*** *que abarca la figura, es decir una medida de su interior.*

La fórmula para calcular el área de un círculo, $A=\pi r^2$, nos dice que π es también la relación que existe entre el área del círculo (en rojo en la figura de la derecha) y el cuadrado construido sobre uno de sus radios (en verde en la figura de la derecha). Lo anterior quiere decir que el área del cuadrado que tiene como lado el radio de un círculo cabe 3.1416 veces en el área del círculo del mismo radio.



La fórmula para calcular el área de un círculo es muy famosa en la geometría y ésta se debe a Arquímedes de Siracusa (215 a.C). Existen muchas formas de demostrar esta fórmula, sin embargo aquí sólo te hemos dado una interpretación geométrica de ella.

Ejemplo 3:

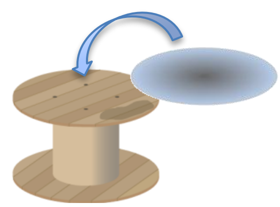
Considera el problema del ejemplo 1. Si sabemos que las latas con las que se van a hacer los dulceros miden 6.5 cm de radio y se requiere hacerles unas tapas circulares de papel, ¿Cuál es el área de cada tapa de papel?

Para determinar el área de las tapas circulares basta con emplear la fórmula para calcular el área de un círculo conociendo la medida de su radio

$$\begin{aligned} A=\pi r^2 &= 3.1416(6.5\text{ cm})^2 \\ &= 3.1416\left(42.25\text{ cm}^2\right) \\ &= 132.73\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4:

Se va a acondicionar un carrete de cable como mesa de centro y para ello se requiere cortar una pieza circular de vidrio que cubra exactamente la tapa superior del carrete (como se muestra en la figura). Si lo único que se sabe es que la tapa superior del carrete tiene un perímetro de 157 cm, ¿Cuál será el área de la pieza circular de vidrio que se debe cortar?



En este problema partimos del perímetro de una circunferencia y lo que queremos es calcular el área de un círculo que cubrirá exactamente a ésta.
Entonces el problema lo solucionamos en dos pasos:

1. A partir del perímetro $P=157\text{ cm}$ calculamos el radio r de la circunferencia de la tapa superior del carrete.

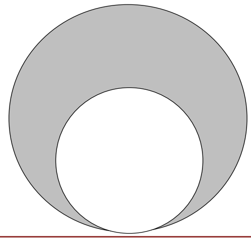
$$r=\frac{P}{2\pi}=\frac{157\text{ cm}}{2(3.1416)}=\frac{157\text{ cm}}{6.2632}=25\text{ cm}$$

2. Con el radio de la circunferencia $r=25\text{ cm}$ calculamos el valor del área A de la pieza circular de vidrio.

$$\begin{aligned} A=\pi r^2 &= 3.1416(25\text{ cm})^2 = 3.1416\left(625\text{ cm}^2\right) \\ &= 1963.5\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Actividad

Calcula el área de la región sombreada en la siguiente figura, suponiendo que el radio del círculo mayor vale 6 cm y el diámetro del círculo menor vale 7 cm.



Cierre:

Antes de finalizar retomemos, ya con los conocimientos que has adquirido, la situación planteada en la introducción para darle solución:

En el patio de la casa de José hay un tambo de forma cilíndrica en el que se almacena agua. En otoño caen muchas hojas de árbol al tambo, pues está descubierto, y por tal motivo el papá de José ha hecho una tapa circular de madera que cubre exactamente superficie superior del tambo.

José recordó que en la escuela recientemente había aprendido algunas cosas sobre las superficies circulares y se propuso determinar el perímetro de la tapa que hizo su papá y la superficie que ésta cubre. ¿A qué resultados llegó José si encontró que el diámetro de la tapa del tambo medía 1.4 m?

Ya sabemos que, cuando conocemos el diámetro D de una circunferencia, calculamos el *perímetro* P de la circunferencia como $P = \pi D$, por lo tanto, el perímetro de la tapa es

$$P = \pi D = 3.1416(1.4 \text{ m}) = 4.4 \text{ m}$$

Ahora, para calcular la superficie o área A debemos dividir el diámetro D entre 2 para obtener el radio r, ya que sabemos que en toda circunferencia $D = 2r$, o lo que es lo mismo, $r = D/2$, por lo que

$$r = \frac{D}{2} = \frac{1.4 \text{ m}}{2} = 0.7 \text{ m}$$

Finalmente, ya que tenemos el valor del radio r, podemos calcular la superficie que cubre la tapa con la fórmula para calcular el área de un círculo, $A = \pi r^2$, es decir,

$$\begin{aligned} A = \pi r^2 &= 3.1416(0.7 \text{ m})^2 \\ &= 3.1416(0.49 \text{ m}^2) \\ &= 1.54 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

En este tema te hemos presentado algunas maneras de resolver problemas en los que se tiene que calcular el área, el perímetro, el diámetro o el radio de objetos circulares. Ya te has dado cuenta lo importante que es comprender la relación existente entre los distintos elementos y magnitudes de la circunferencia y círculo para resolver situaciones de la vida cotidiana. No olvides identificar en cada problema los datos que te proporcionan para que a partir de ellos puedas determinar la o las fórmulas que requieres emplear para obtener la solución.

Para saber más…

http://www.genmagic.org/mates2/cir1c.swf

http://aula2.elmundo.es/aula/laminas/lamina1082971116.pdf

http://www.lamanzanadenewton.com/curiosidades/lecturas/lmn_lect09.html

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta.

1. En un carrete de radio igual a 3 cm se ha enredado 4 veces una cinta. ¿Cuál es la longitud de la cinta?

A) 113.09

B) 75.398

C) 50.796

D) 37.699

2. Calcula el área en cm^2 que ocupa la base de una lata cilíndrica cuyo diámetro mide 10 cm. Considera que el valor de $\pi = 3.1416$.

A) 15.71

B) 31.32

C) 78.54

D) 314.16

3. Se va a construir un estadio de futbol y para restringir el paso al área de trabajo se ha colocado una malla de 15,708 m, formando una circunferencia. ¿Cuál es el área de construcción en m^2?

A) 78,540,000

B) 19,635,000

C) 7851

D) 5000

4. Se tiene un círculo que mide 3.1416 m^2 de área. ¿Cuál es el área de un círculo con el doble de radio que el círculo anterior?

A) 6.283

B) 9.870

C) 12.566

D) 39.478

5. Si el lado del cuadrado en la figura mostrada mide 2.5 cm, ¿cuál es el área en cm^2 de la región sombreada en la figura?

A) 1.34

B) 3.80

C) 4.91

D) 6.25

TEMA 5. PROPORCIONALIDAD INVERSA

Bloque V

Eje temático: Manejo de la información

Tema: Análisis de la información

Subtema: Relaciones de proporcionalidad

Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas que implican una relación inversamente proporcional entre dos conjuntos de cantidades.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.

Introducción:

En la final estatal de un concurso de ortografía quedaron solamente Marcos y Andrea. El premio de $6,000 será compartido y se repartirá de manera que quién tenga más errores obtendrá menos dinero. Si Andrea cometió 12 errores y Marcos 18 errores, ¿cuánto dinero ganó finalmente Andrea?

Para poder responder al cuestionamiento de la situación anterior es preciso notar que cuanto **mayor** es el número de errores que comete alguno de los finalistas del concurso, **menor** será la cantidad de dinero que reciba como premio. Existen muchas situaciones cotidianas que relacionan dos cantidades de manera que a medida que una aumenta la otra disminuye. Siempre que estamos ante este tipo de situaciones decimos que las cantidades varían de manera *inversamente proporcional* o que existe una relación de **proporcionalidad inversa** entre las dos cantidades.

Desarrollo:

A continuación te presentaremos algunos conceptos y procedimientos que podemos emplear cuando tratamos de resolver problemas que presentan dos tipos de magnitudes o cantidades entre las cuales existe una relación de **proporcionalidad inversa**. Para ello vamos a iniciar con el planteamiento de algunas situaciones de este tipo.

Considera el tipo de relación que existe entre las cantidades o magnitudes involucradas en las siguientes situaciones:

- ❖ La velocidad de un vehículo y la duración del viaje al recorrer una distancia fija.
- ❖ El número de obreros y el tiempo para terminar una determinada obra.
- ❖ El número de personas en una fiesta y el trozo de pastel que le tocará a cada una.

Observa que en todas las situaciones anteriores, a medida que aumenta la primera cantidad, la lógica nos indica que la segunda disminuirá. Así por ejemplo, supongamos que en la primera situación varios vehículos recorren una distancia fija de 120 km y que cada vehículo viaja a una velocidad constante conforme a la tabla de la derecha.

Velocidad (km/h)	Tiempo (minutos)
75	96
80	90
100	72
120	60

Evidentemente, las magnitudes de velocidad y tiempo no están en una relación de proporcionalidad directa; por el contrario, al aumentar los valores de una, disminuyen los de la otra, y viceversa.

Recuerda

*Una relación de **proporcionalidad directa** entre dos magnitudes es aquella en la que, si los valores de una de las magnitudes se multiplican o dividen por un número, los de la otra quedan multiplicados o divididos por el mismo número. Por ejemplo:*

- ❖ *El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran y el precio a pagar.*
- ❖ *El tiempo transcurrido y la distancia recorrida a una velocidad constante.*

En las situaciones de proporcionalidad directa, lo que se mantiene constante es la **razón** entre pares de valores correspondientes, mientras que en las situaciones como las del ejemplo, lo que se mantiene constante es el **producto** entre pares de valores correspondientes: $75 \times 96 = 80 \times 90 = 100 \times 72 = 120 \times 60 = 7200$.

Recuerda

Una razón es un cociente entre dos cantidades y el valor de ese cociente se llama valor de la razón. La razón de a es a b puede expresarse como $\frac{a}{b}$.

En toda situación en que se relacionan dos magnitudes, si cualquier par de valores correspondientes a y b; c y d (donde a y c son de la primera magnitud, y b y d de la segunda) verifican la igualdad: $a \times b = c \times d$, entonces decimos que **las magnitudes se hallan en una relación de proporcionalidad inversa**, o que **son inversamente proporcionales**. Si en general denotamos como x e y ambas magnitudes, y como k el producto constante de cada par de valores correspondientes, la relación entre ambas magnitudes puede representarse mediante la expresión algebraica

$$xy = k$$

donde k es conocida como la **constante de proporcionalidad inversa**.

Para clarificar lo anterior, consideremos la situación de las velocidades y tiempos de recorrido de la página anterior.

Velocidad (km/h)	Tiempo (minutos)
75	96
80	90
100	72
120	60
x	y

Sean $a = 75$, $b = 96$, $c = 80$ y $d = 90$, donde a y c son velocidades en km/hr y b y d tiempos en minutos, se verifica que $a \times b = c \times d = 7200$. Si multiplicamos cualquier par de valores correspondientes al mismo reglón de la tabla se obtiene siempre la misma cantidad, 7200, que es el valor de la **constante de proporcionalidad inversa** para esta situación. Esto lo podemos expresar algebraicamente como

$$xy = 7200$$

La regla de tres inversa

Existe una técnica para resolver los casos en los que, en una relación de proporcionalidad inversa, de los cuatro valores correspondientes a dos pares de magnitudes implicadas, se conocen tres y se desconoce uno.

La **regla de tres inversa** es la operación de encontrar una cuarta magnitud en una relación de proporcionalidad inversa sabiendo el valor de las otras tres magnitudes implicadas. Si conocemos los valores de a, b y c; y desconocemos el valor de d, en donde a y c son de la primera magnitud, y b y d de la segunda, podemos establecer la siguiente relación:

$$a \to b$$
$$c \to d$$

De donde el valor de d se obtiene multiplicando el par de magnitudes del primer renglón e igualándolo al producto del par de magnitudes del segundo renglón $a \times b = c \times d$ (ya que ambos productos son iguales a la constante de proporcionalidad inversa). Finalmente despejamos d de la igualdad planteada de modo que

sea $a \times b = c \times d$, entonces, $d = \frac{a \times b}{c}$.

Del producto $a \times b = c \times d$, derivamos la proporción $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$. Si se tratara de una situación de proporcionalidad directa, la proporción pertinente sería $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ó, lo que es lo mismo, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Observa como la proporción $\frac{a}{c} = \frac{d}{c}$ se forma invirtiendo una de las razones de una proporción directa $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ($\frac{b}{d}$ pasa a ser $\frac{d}{b}$). De aquí el nombre de **proporcionalidad inversa** que se aplica a las magnitudes que se relacionan de manera que su producto (y no su cociente) permanece constante.

Ejemplo 1:

Para ir de la ciudad de León a la ciudad de México, una persona duró 4 horas viajando en su automóvil a una velocidad promedio de 110 kilómetros por hora. Si otra persona que viajó en autobús duró 5½ horas en llegar a la Ciudad de México desde León, ¿a qué velocidad promedio viajó el autobús?

Podemos establecer la siguiente relación con las tres magnitudes que nos dan y la que nos piden determinar

$$4 \text{ hr} \rightarrow 110 \text{ km/hr}$$
$$5\tfrac{1}{2} \text{ hr} \rightarrow \ ?$$

De manera que si $a=4$, $b=110$, $c=5\tfrac{1}{2}$ y $d=?$, al aplicar la regla de tres inversa tendríamos que $a\times b=c\times d$,y de aquí que

$$d=\frac{a\times b}{c}=\frac{(4)(110)}{5\tfrac{1}{2}}=\frac{440}{5.5}=80$$

De lo anterior concluimos que la velocidad del autobús fue de 80 km/h. Nota que la constante de proporcionalidad inversa en esta situación es igual a 440 y la podemos expresar algebraicamente como

$$xy=440$$

¿Para qué nos sirve la expresión anterior?

Una vez que determinamos la expresión para la constante de proporcionalidad de una situación específica, podemos calcular, dado algún valor de una de las dos magnitudes involucradas, el valor corresponde a la otra magnitud. Si para la situación anterior asignamos a x los valores del tiempo que dura el viaje y a y asignamos las velocidades promedio, podemos calcular, por ejemplo

a) el tiempo de viaje de un automóvil que hizo el recorrido a una velocidad promedio de 105 km/hr, o

sea $xy=440$ con $y=105$, entonces $x=\dfrac{440}{y}=\dfrac{440}{105}=4.19 \text{ hr}$

b) la velocidad promedio a la que viajó un automóvil si éste hizo 4 ¼ hr des recorrido

sea $xy=440$ con $x=4.25$, entonces $y=\dfrac{440}{x}=\dfrac{440}{4.25}=103.53 \text{ km/hr}$

Actividad

En un laboratorio se realiza un experimento para comprobar la relación que hay entre la presión de un gas y el volumen que ocupa (suponiendo que la temperatura es constante). En la siguiente tabla se registraron los datos obtenidos en el experimento.

$x=$(Presión del gas en atmósferas)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y=$ (Volumen en dm^3)	12	6	4	3	2.4	2

Con la información proporcionada, responde las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica asociada a este problema?
b) ¿Qué volumen ocupará el gas cuando la presión sea igual a 0.9 atmósferas?
c) ¿A qué presión estará el gas cuando éste ocupe un volumen de 1.5 dm^3?

Ahora reconsideremos la situación planteada en la introducción:

En la final estatal de un concurso de ortografía quedaron solamente Marcos y Andrea. El premio de $6,000 será compartido y se repartirá de manera que quién tenga más errores obtendrá menos dinero. Si Andrea cometió 12 errores y Marcos 18 errores, ¿cuánto dinero ganó finalmente Andrea?

Considerando que el premio es de $6000 y si definimos a y como la cantidad de dinero que gana Andrea, la cantidad de dinero que gana Marcos sería $6000-y$. Podemos establecer entonces la siguiente relación

$$\begin{aligned} 12 \text{ errores} &\rightarrow y \\ 18 \text{ errores} &\rightarrow 6000-y \end{aligned}$$

Al aplicar la regla de tres inversa obtenemos la siguiente expresión

$$12y = 18(6000-y)$$

Si realizamos las operaciones indicadas y despejamos x, llegamos a

$$\begin{aligned} 12y &= 108000-18y \\ 30y &= 108000 \\ y &= \frac{108000}{30} \\ y &= 3600 \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que Andrea ganó $3600 de los $6000 que había en total en el premio.

¿Cuál es la constante de proporcionalidad inversa de está situación?

Siempre que queramos saber el valor de la constante de proporcionalidad inversa debemos multiplicar un par de valores correspondientes a las magnitudes involucradas, en este caso tenemos que si $x=12$ y $y=3600$, entonces

$$k = xy = (12)(3600) = 43200$$

Cierre:

En este tema hemos presentado algunos conceptos y procedimientos que podemos emplear cuando tratamos de resolver problemas que presentan dos tipos de magnitudes o cantidades entre las cuales existe una relación de **proporcionalidad inversa**. Debes de tener presente que en este tipo de situaciones lo que se mantiene constante es el **producto** entre pares de valores correspondientes a las dos cantidades involucradas y que siempre se podrán representar mediante una expresión del tipo

$$xy = k.$$

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.desarrollomultimedia.cl/digitales_html/oda_html/tipoEjercitacion/11/paso3.swf

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/09/4.swf

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Si 4 personas tardan 8 días en aplanar un terreno y si todas las personas trabajan de manera proporcional. ¿Cuántos días tardarían en aplanar el mismo terreno 8 personas?

A) 4

B) 8

C) 12

D) 16

2. Ángeles tiene dinero suficiente para comprar 20 paquetes de dulces de $40, cada uno. Si los paquetes de dulces suben a $50. ¿Cuántos paquetes de dulces podrá comprar con el mismo dinero?

A) 10

B) 15

C) 16

D) 18

3. En una carrera atlética se van a repartir 120 puntos, el que haga menos tiempo obtienen más puntos: es decir, hay una relación inversamente proporcional. Si Martha hizo 6 minutos y María 4, ¿cuántos puntos hizo María?

A) 40

B) 48

C) 60

D) 72

4. La siguiente tabla relaciona la velocidad media en km/hr de un camión de carga y el tiempo en horas que tarda en cubrir la distancia que separa dos ciudades.

Velocidad mm/hr	**Tiempo horas**
50	4
100	2
25	8

¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

A) 25

B) 50

C) 100

D) 200

5. La siguiente tabla relaciona el número de personas con el número de días que se tardarían en hacer un trabajo.

Números de personas	**Número de días**
5	y
4	5
2	x

Si existe una relación de proporcionalidad inversa entre ambos grupos de cantidades, ¿cuál de las siguientes opciones contiene los valores correctos de x y y?

A) $x=8$, $y=6$

B) $x=8$, $y=4$

C) $x=10$, $y=6$

D) $x=10$, $y=4$

TEMA 6. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Bloque V

Eje temático: Manejo de la información

Tema: Representación de la información

Subtema: Medidas de tendencia central y de dispersión

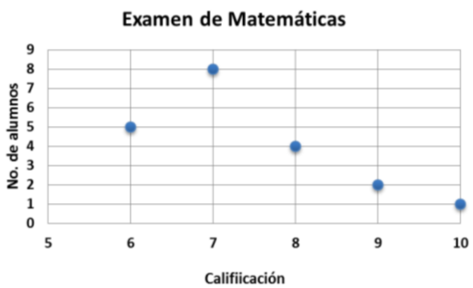
Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas que impliquen interpretar las medidas de tendencia central.

Resultado específico de aprendizaje:

Analiza el comportamiento de dos o más conjuntos de datos referidos a una misma situación o fenómeno a partir de sus medidas de tendencia central.

Introducción:

La gráfica de la derecha muestra la distribución de calificaciones del último examen parcial que se aplicó a un grupo de 20 alumnos de primer grado de una escuela secundaria.
De acuerdo con la información presentada en la gráfica, ¿Cuál fue la calificación que se presento con mayor frecuencia en el grupo?; ¿Cuál fue el promedio de este grupo en el examen?



Podríamos encontrar distintas formas para dar respuesta a las preguntas planteadas en la situación anterior, de hacho la respuesta a la primera pregunta es un tanto sencilla pues basta con saber interpretar la información de la gráfica, sin embargo la segunda pregunta no es tan sencilla y debemos hacer algunos cálculos para llegar a la respuesta. En este tema describiremos lo que en estadística se conoce como medidas de tendencia central y mostraremos su utilidad para analizar y comparar conjuntos de datos referidos a una misma situación.

Desarrollo:

Una parte de la *Estadística Descriptiva* se encarga específicamente de determinar lo que conocemos como **medidas de tendencia central**, algunas de las cuales están directamente relacionadas con los cuestionamientos de la situación planteada en la introducción. En este tema describiremos cada una de estas medidas y mostraremos su utilidad para extraer información valiosa de situaciones que se nos presentan mediante un conjunto de datos.

*La **Estadística Descriptiva** es la parte de la estadística que trata sobre los métodos de recolección, descripción, visualización y resumen de datos originados a partir de los fenómenos en estudio. Los datos pueden ser resumidos numérica o gráficamente.*

Recuerda

Medidas de Tendencia Central

Una vez que se han recolectado y organizado los datos originados por la observación de un fenómeno natural o social, por la repetición de un experimento, por la aplicación de alguna encuesta, etc. Éstos se pueden presentar por medio de tablas (de frecuencias) o gráficas. En la situación planteada en la introducción, los datos organizados se han presentado en forma de gráfica, pero no siempre es así y frecuentemente lo que tenemos a disposición es la tabla de frecuencias por la cual fue desarrollada la gráfica, en este caso particular la tabla que sirvió de base para hacer la gráfica debió haber sido una como la siguiente.

Observando la gráfica o la tabla podemos obtener alguna información sobre las calificaciones de los alumnos, por ejemplo podemos observar que la calificación menor fue 6, la mayor 10 y la calificación que más se repitió fue 7. De hecho esta última observación es la respuesta a la primera pregunta que se planteó en la introducción, sin embargo, ¿qué sucede con la segunda pregunta?, ¿cómo calculamos el promedio?

Calificación	No. de alumnos
6	5
7	8
8	4
9	2
10	1

Ya habrás notado que aunque se organicen los datos en una forma útil y significativa en tablas o gráficas en ocasiones es necesario disponer de información que describa a todo el conjunto de datos de manera precisa. Una forma útil de describir a un grupo de datos en su totalidad es encontrar algunos números que lo representen.

Una de las características que se presenta en múltiples *distribuciones de frecuencias* es que los datos se acumulan alrededor de algunos *valores centrales* situados entre los dos extremos de la variable que se estudia. Esos valores son conocidos en la estadística como **medidas de tendencia central**, ya que están generalmente localizados hacia el medio o centro de una distribución en la que la mayoría de los datos tienden a concentrarse.

La tendencia central de un conjunto de datos generalmente es definida por tres parámetros estadísticos conocidos como **la moda, la media aritmética y la mediana**.

*Una **distribución de frecuencias** es una forma de organizar un conjunto de datos para resumir la información que éstos aportan. Esta puede presentarse en forma de tabla o gráfico y en ella se presentan en orden creciente los valores observados de la variable de interés, así como la cantidad de veces que ocurren, es decir, sus respectivas frecuencias absolutas.*

Recuerda

Moda

La **moda** (Mo) es el valor que se repite más veces en una distribución, es decir, el valor con mayor frecuencia. En una distribución de frecuencias específica podemos encontrar más de una moda, una sola moda o ninguna moda (cuándo no se repite ningún valor).

La moda es la medida de tendencia central más fácil de obtener debido a que ésta puede encontrarse simplemente por inspección más que por cálculos.

Observando la gráfica o la tabla de frecuencias de la situación planteada en la introducción podemos notar que la moda de calificaciones fue 7 ya que ésta se repite 8 veces (es decir, tuvo la mayor frecuencia).

$$Mo = 7$$

Media aritmética

La **media aritmética** ($\bar{x}$) es la sumatoria de todos los valores de un conjunto de datos, dividida entre el número total (n) de datos. Es la medida de tendencia central más comúnmente utilizada ya que representa el punto alrededor del cual los valores se aglutinan. La media aritmética puede coincidir o no con alguno de los datos del conjunto.

La media aritmética es también conocida como el valor **promedio** de todos los datos ya que para obtenerla, se suman todos los datos y esta suma se divide entre el número de datos considerados.

Con el fin de presentar una fórmula generalizada para calcular la media aritmética de cualquier conjunto de datos hemos designado con la letra n al número de datos del conjunto que estemos analizando; a los datos del conjunto los identificamos con los símbolos $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, donde, por ejemplo, x_5 representa el quinto dato y así hasta el dato número n; y finalmente denotamos a la media aritmética con el símbolo $\overline{x}$, de manera que la fórmula que permite calcular su valor se expresa así:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Ejemplo 1:

Se ha tomado el tiempo de espera para pasar a ventanilla de los últimas 12 clientes que ingresaron a un banco y los resultados en minutos son 11, 13, 9, 10, 8, 12, 11, 14, 9, 13, 11, 8. Determina el promedio de tiempo de espera de estas personas.

En este caso tenemos 12 datos, es decir $n = 12$. Empleando la fórmula dada tenemos que la media aritmética (o promedio) se calcula como

$$\overline{x} = \frac{11+13+9+8+12+11+14+9+13+11+8}{12} = \frac{129}{12} = 10.75$$

Lo cuál quiere decir que en promedio las 12 personas esperaron 10 minutos y 45 segundos (ya que 0.75 de un minuto equivale a ¾ de minuto, es decir, 45 segundos).

Como puedes ver, para calcular la media aritmética no hace falta que los datos estén ordenados, ya que la suma es conmutativa.

El resultado de la media aritmética es afectado por cada valor. Los valores extremos influyen en la media aritmética y en algunos casos pueden distorsionarla tanto que resulte inconveniente como una medida de tendencia central.

En el caso planteado en la introducción los datos no se han presentado “uno a uno” como en el ejemplo anterior, más bien los tenemos organizados por frecuencias. En estos casos la suma de todos los datos (“uno a uno”), puede sustituirse por la suma de los productos de cada dato $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ que aparece en la tabla por su frecuencia correspondiente $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$. De esta forma, la expresión adecuada para el cálculo de la media es:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \times f_1 + x_2 \times f_2 + x_3 \times f_3 + \ldots + x_k \times f_k}{n}$$

Observa que en el numerador de la fórmula anterior, el subíndice de x y f del último sumando es k y no n ya que ahora habrá menos sumandos, porque ya no se suman “uno a uno” los datos repetidos. Es decir, los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$, representan ahora cada uno de los valores *distintos* de los datos y son éstos los que aparecen en la primera columna de la tabla de frecuencias.

De acuerdo a la fórmula presentada para calcular la media aritmética cuando tenemos los datos organizados por frecuencias (para el caso planteado en la introducción) el promedio o media aritmética de calificaciones se calcula de la siguiente forma:

$$\overline{x} = \frac{6\times5+7\times8+8\times4+9\times2+10\times1}{20} = \frac{146}{20} = 7.3$$

Podemos decir entonces el promedio de calificaciones del grupo en el último examen parcial de matemáticas es de **7.3**. Observa como en este caso la media aritmética no coincide con ninguno de los datos originales, de hecho el valor de la media aritmética tiene una cifra decimal aun cuando todos los datos originales fueron enteros.

Mediana

La **mediana** (Me) es el valor que, una vez ordenados todos los datos, se encuentra al centro (a la mitad) de la distribución. Si el número de datos es impar, coincidirá con uno de los datos; si el número de datos es par, hay que promediar los dos valores que se hallen en el centro de la distribución.

Como la mediana es el valor que se encuentra al centro de la distribución de datos una vez que éstos se ordenan, podemos decir que corresponde al valor que divide al conjunto de datos en dos partes iguales, de tal forma que la mitad de los valores son mayores que la mediana y la otra mitad es menor que la mediana. Una de las cualidades de la mediana es que los valores extremos no afectan el resultado.

Ejemplo 2:

Calcula la mediana del tiempo de espera para el conjunto de personas del caso presentado en el ejemplo 1.

Recapitulando el caso del ejemplo 1 teníamos que como tiempo de espera en el banco los siguientes

11, 13, 9, 10, 8, 12, 11, 14, 9, 13, 11, 8

Debemos entonces ordenarlos de menos a mayor, quedando así

8, 8, 9, 9, 10, **11, 11**, 11, 12, 13, 13, 14

El número de datos es 12 y al ser éste un número par, la mediana se calcula promediando los valores de los dos datos centrales (en este caso el 6to y 7mo dato), pero como ambos datos valen lo mismo su promedio es el valor de ambos datos, es decir, 11.

$$Me = \frac{11+11}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

Debes notar que no siempre el número total de datos es un número par, en estos casos la mediana corresponde al valor del único *dato central*. Más aun, no siempre que tenemos un número par de datos, los valores de los *datos centrales* son iguales, en estos casos, el promedio de los valores centrales es un valor distinto al de los datos centrales.

Cuando los datos se presentan en una tabla de frecuencias, como en el caso presentado en la introducción, debemos determinar la posición del valor central (cuando el total de valores es un número impar) o de los valores centrales (cuando el total de valores es un número par) y buscar en la tabla de frecuencias el o los valores correspondientes.

A la derecha hemos colocado nuevamente la tabla de frecuencias de las calificaciones del último examen parcial de matemáticas del grupo de secundaria. De acuerdo con el párrafo anterior, por tratarse de 20 datos (número par), el valor de la mediana correspondería al promedio de los valores de los datos ubicados en las posiciones 10 y 11. A estas dos posiciones corresponden calificaciones de 7 (ya que analizando la 2da columna, las calificaciones de 7 comienzan a partir del 6to dato y concluyen con el 13vo dato), de manera que

Calificación	No. de alumnos
6	5
7	8
8	4
9	2
10	1

$$Me = \frac{7+7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Para mostrar situaciones distintas al caso anterior te presentamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3:

En otro día, los tiempos de espera en minutos para que un grupo de 9 clientes fueran atendidos en la ventanilla del mismo banco que los ejemplos 1 y 2 fueron 11, 7, 10, 9, 10, 8, 7, 10, 9. Determina la mediana de este grupo de datos.

Para determinar el valor de la mediana ordenamos los datos de menos a mayor

7, 7, 8, 9, **9**, 10, 10, 10, 11

En este caso se trata de 9 datos y al ser éste un número impar, a la mediana le corresponde el valor del 5to dato, pues es este el único dato central; entonces:

$$Me = 9$$

Ejemplo 4:

Siguiendo con el caso del tiempo de espera de clientes de un banco para ser atendidos en ventanilla, ahora se recolectaron los tiempos de espera de las 4 primeras personas que llegaban el banco cada día de lunes a viernes. Los resultados se muestran en la tabla. ¿Cuál es la mediana de este conjunto de datos?

Tiempo de espera	No. de clientes
12	4
15	6
17	8
20	2

Vemos que se trata de 20 clientes, por lo que la mediana será el promedio de los valores de los datos ubicados en las posiciones 10 y 11. En la tabla observamos que estos valores son 15 y 17, respectivamente, por lo que la media en este caso es:

$$Me = \frac{15+17}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Observa como la mediana puede no coincidir con alguno de los valores de la distribución.

Actividad

Como parte de un estudio para determinar el grado de nutrición de 12 alumnos de un grupo de primaria se ha tomando la estatura en centímetros de cada uno de ellos. Los resultados se presentan en la tabla de la derecha.

1. Determina, para este conjunto de datos, la moda, la media aritmética y la mediana y explica lo que indica cada una de éstas respecto del total de los datos.

2. Realiza comparaciones entre las tres medidas de tendencia central que calculaste y responde, ¿Cuál de las tres medidas describe mejor a la distribución de los datos? ¿Por qué?

Estaturas (cm)	Frecuencia absoluta
130	1
132	2
134	3
136	4
138	1
140	1

Cierre:

En este tema hemos presentado la forma en que podemos determinar la moda, la media aritmética y la mediana de un conjunto de datos, mejor conocidas como medidas de tendencia central ya que éstas están generalmente localizadas hacia el centro de una distribución. Así mismo mostramos su utilidad para resumir en unos cuantos valores la información que nos presenta un conjunto de datos ordenados y presentados en gráficas o tablas de frecuencias.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.cete-sonora.gob.mx/recursos/isos/rec_mult_edu_sec1er_grado/matematicas/bloque_5/de_la_moda_lo_que_te_acomoda__medidas_de_tendencia_MA1_B5_5.6.1/ODA_MA1_B5_5.6.1.swf

http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales/odas_matematicas/17_mediana_dispersion/LearningObject/content/io_6.swf?version=0.24

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. En una encuesta se recabó el número de hijos que tienen las familias que viven en una comunidad, los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Número de hijos	Número de familias
1	5
2	10
3	10
4	10
5	5

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de tabla?

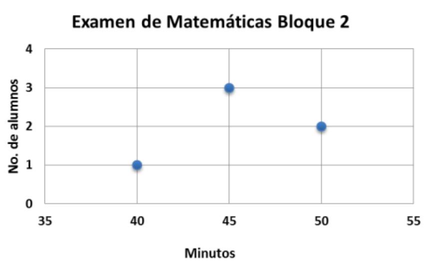
A) La media, moda y mediana tienen valores distintos.

B) La mediana es igual a la moda.

C) La media aritmética es igual a la mediana.

D) La moda es igual a la media aritmética.

2. En la gráfica se muestra el tiempo en minutos empleado por un equipo de alumnos en la resolución del examen de matemáticas correspondiente al bloque 2.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de la gráfica?

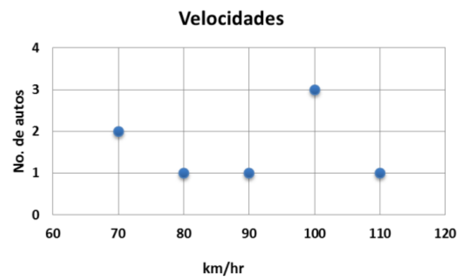
A) La media, moda y mediana tienen valores distintos.

B) La mediana es igual a la media aritmética.

C) La media aritmética es igual a la moda.

D) La moda es igual a la mediana.

3. Con un radar de control de velocidad se midieron las velocidades en km/hr de 8 vehículos que pasaron en el último minuto del día de ayer por una de las avenidas principales de la ciudad de Guanajuato. Los resultados se presentan en la siguiente gráfica.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de gráfica?

A) Existe más de una moda en este conjunto de datos.

B) La media a coincide con uno de los datos del conjunto.

C) La mediana coincide con uno de los datos del conjunto.

D) La media, moda y mediana tienen el mismo valor.

4. A continuación se presentan los valores ordenados de menor a mayor correspondientes al número de asistencias que tuvieron el último bimestre los alumnos de un grupo de secundaria a la clase de matemáticas.

11, 12, 13, 15, 15, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 21, 21, 23, 24, 26

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta con respecto a los datos de la lista?

A) La media, moda y mediana tienen el mismo valor.

B) La media coincide con uno de los datos del conjunto.

C) La mediana coincide con uno de los datos del conjunto.

D) Existe una sola moda en este conjunto de datos.

TEMA EXTRA: DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Bloque III

Eje temático: Manejo de la información

Tema: Representación de la información

Subtema: Diagramas y tablas

Resultado general de aprendizaje: Interpreta y construye gráficas de barras y circulares a partir de frecuencias absolutas y relativas.

Resultado específico de aprendizaje:

Comunica información mediante la descripción, interpretación, o construcción de tablas de frecuencia absoluta y relativa.

Introducción:

Como parte de un estudio para determinar el grado de nutrición de 20 alumnos de un grupo de primaria se ha tomando la estatura en centímetros de cada uno de ellos, las cuales son:

128	146	136	136	150
140	124	134	142	138
136	121	130	136	132
136	134	142	132	144

De acuerdo con los datos, **¿cuál es el porcentaje de alumnos que presenta una estatura menor o igual a los 140 cm?**

Existen diversas formas que podemos emplear para contestar la pregunta anterior, pero definitivamente, cuando queremos extraer información valiosa de un conjunto de datos, es muy conveniente elaborar una **tabla de distribución de frecuencias**, que es una herramienta que nos resulta muy útil cuando requerimos organizar la información que se nos presenta a manera de datos sobre algún fenómeno, estudio, investigación o situación cotidiana particular.

Desarrollo:

A continuación te presentamos la manera en que se desarrollan las **tablas de distribución de frecuencias**. Estas conforman una herramienta de gran utilidad en la **estadística**, cuando queremos organizar un conjunto de datos extraídos ya sea de un estudio, la observación de un fenómeno, el resultado de un experimento o el análisis de alguna situación cotidiana de nuestro interés.

*La **Estadística** es la ciencia que se ocupa del tratamiento de la información; es decir, de estudiar los fenómenos de cualquier tipo por medio de **datos** observados y cuantificados, que son recogidos, **organizados**, representados y analizados con el fin de precisar su significado e inferir, en lo posible, predicciones de cara al futuro.*

Recuerda

Antes de describir la forma en que se elaboran las tablas de distribución de frecuencias para la organización de los datos es preciso recordar algunos conceptos importantes.

Frecuentemente nos encontramos con ciertas “características” en los objetos o personas que son susceptibles de una clasificación o de medición, las cuales se denominan **variables**, por ejemplo, existen diversos colores de la piel o de los ojos, diversos precios de los artículos de primera necesidad, diversas calificaciones escolares en una escuela, diversas estaturas y pesos en las personas, etc.

En relación con lo anterior podemos decir que:

Las ***variables*** pueden ser de dos tipos

- ***Cualitativas*** (también llamadas *atributos*), aquellas que son sólo susceptibles de *clasificación*.
- ***Cuantitativas***: aquellas que son susceptibles de *medición numérica*.

Entre las variables cuantitativas encontramos dos maneras de medir. La primera se refiere y aplica a las características que se miden por medio del *conteo*. Por ejemplo, las inasistencias diarias de los alumnos de una escuela; o el número de personas que habitan en cada una de las viviendas de una comunidad o colonia.

El tipo de variables que se miden contando recibe el nombre de ***discretas***. Como se ve, estas variables sólo pueden tomar ***valores enteros***.

La segunda manera de medir se refiere y aplica a las variables que se denominan ***continuas*** porque, entre dos valores fijos, pueden tomar *todos los valores intermedios* (decimales). Tal es el caso, por ejemplo, del peso o la estatura de las personas, o la velocidad de un carro.

Debemos resaltar también que las *variables cualitativas* pueden clasificarse en categorías que no mantienen una *relación de orden* entre sí. Por ejemplo, no es posible establecer cuál de los colores está por encima de los otros. En cambio, entre los valores que pueden tomar las *variables cuantitativas* sí existe un cierto orden. Por ejemplo, es posible ordenar los valores de las estaturas, de las edades de las personas, etc.

Por esta razón se dice que;

Las ***variables cualitativas*** se miden en una ***escala nominal*** (sus valores se reducen a los "nombres" de las categorías en que se clasifica el atributo) y que las ***variables cuantitativas*** se miden en una ***escala ordinal*** (tiene sentido ordenar sus valores).

Actividad

Identifica cada una de las siguientes variables como cualitativa o cuantitativa; en este último caso, determina si es discreta o continua.

1. Estado civil
2. Ingresos mensuales familiares
3. Equipo favorito de futbol
4. Número de páginas de un libro
5. Profesión u ocupación
6. Edad en años de las personas
7. Simpatía por un partido político
8. Temperatura del ambiente
9. Precio del transporte público
10. Mascota o animal preferido

En relación con todo lo anterior, hay algunos rasgos comunes a destacar respecto de los distintos tipos de variables.

Una **población** es el conjunto de personas, objetos, etc. que porta alguna información relativa a la variable que se estudia.

A cada uno de los objetos o personas que aportan información relativa a la variable que se estudia se les denomina **elementos** de la población.

Los resultados de la clasificación o medición de una variable en el seno de una población reciben el nombre de ***datos.***

Los datos (sean categorías o clases de un atributo, o números que resultan de una medición) reflejan la variabilidad de la característica estudiada en esa población. En este sentido, los datos son *mediciones en un contexto específico*, condición indispensable para que puedan transmitir información.

Recuerda

¿Y qué es lo que debemos hacer con los datos?

Debemos, antes que nada, reconocer su utilidad dentro de un contexto específico pues muchos fenómenos naturales o sociales, o situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidos a partir del análisis de un conjunto de datos que hayan sido **recolectados** en forma adecuada, de manera que al ser **organizados** puedan ser **presentados** de manera sintética para extraer información precisa sobre la variabilidad de la característica de nuestro interés.

Es importante mencionar que las variables que consideraremos en los ejemplos y actividades dentro de esta sesión son variables cuantitativas discretas.

Tablas de distribución de frecuencias

Cuando ya hemos recolectado un conjunto de datos sobre alguna situación de nuestro interés, lo conveniente es organizarlos para que podamos extraer de ellos información precisa y útil. Para ello podemos recurrir a la elaboración de su tabla de distribución de frecuencias.

Una **tabla de distribución de frecuencias** es una forma de organizar un conjunto de datos para resumir la información que éstos aportan. En ella se presentan en orden creciente los valores observados de la variable de interés, así como la cantidad de veces que ocurren, es decir, sus respectivas **frecuencias absolutas**.

La suma de las frecuencias absolutas de cada uno de los datos siempre es igual al total de los datos de la población (conjunto de datos considerados).

Volvamos a la situación planteada en la introducción:

Como parte de un estudio para determinar el grado de nutrición de 20 alumnos de un grupo de primaria se ha tomando la estatura en centímetros de cada uno de ellos, las cuales son:

128	**146**	**136**	**136**	**150**
140	**124**	**134**	**142**	**138**
136	**121**	**130**	**136**	**132**
136	**134**	**142**	**132**	**144**

De acuerdo con los datos, ¿cuál es el porcentaje de alumnos que presenta una estatura menor o igual a los 140 cm?

Para realizar la tabla de distribución de frecuencias iniciamos ordenando nuestros datos de mayor a menor:

121	132	136	142
124	134	136	142
128	134	136	144
130	136	138	146
132	136	140	150

A continuación, organizamos los datos en la tabla de distribución de frecuencias, colocando los valores de las mediciones (datos) en la primera columna y sus respectivas frecuencias en la segunda columna.

Observa como en el último renglón de la segunda columna (frecuencias) hemos colocado la sumatoria de las frecuencias, que es igual al número total de datos proporcionados. Esta igualdad siempre se tiene que comprobar, de lo contrario habría que volver a revisar la frecuencia que hemos determinado para cada dato.

Por lo general, una distribución de frecuencias resulta más fácil de entender si se agrega a ella la frecuencia relativa de cada dato, es decir, la frecuencia expresada como porcentaje del número total de datos.

Estaturas (cm)	Frecuencia absoluta
121	1
124	1
128	1
130	1
132	2
134	2
136	5
138	1
140	1
142	2
144	1
146	1
150	1
	20

La **frecuencia relativa** de un valor observado es el cociente entre su frecuencia y el total de observaciones realizadas, e indica la parte del total de la población que tiene un mismo atributo o característica.

Regularmente la frecuencia relativa se expresa como un número decimal o como un porcentaje. Para presentar las frecuencias absolutas en forma de porcentajes tomamos sus valores expresados como cociente y los multiplicamos por 100.

Cuando se trata de presentar información estadística, las tablas que se utilizan con mayor frecuencia son las que contienen las frecuencias relativas en forma de porcentajes.

Continuando con el desarrollo de la tabla de distribución de frecuencias de las estaturas de los alumnos de primaria, agregamos dos columnas en las que se presentan las frecuencias relativas como números decimales y como porcentajes.

La frecuencia relativa se obtiene dividiendo su frecuencia entre el número total de datos, por ejemplo para el primer dato (121 cm) tenemos $1 \div 20 = 0.05$; y así sucesivamente.

La frecuencia relativa en porcentaje se obtiene multiplicando por 100 la frecuencia relativa, por ejemplo para el primer dato tenemos $0.05 \times 100 = 5$; y así sucesivamente.

Estaturas (cm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa (%)
121	1	0.05	5
124	1	0.05	5
128	1	0.05	5
130	1	0.05	5
132	2	0.10	10
134	2	0.10	10
136	5	0.25	25
138	1	0.05	5
140	1	0.05	5
142	2	0.10	10
144	1	0.05	5
146	1	0.05	5
150	1	0.05	5
	20	**1**	**100**

Recuerda

- ☑ *La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de datos u observaciones.*
- ☑ *La suma de las frecuencias relativas expresadas como números decimales es igual a 1.*
- ☑ *La suma de las frecuencias relativas expresadas como porcentajes es igual a 100.*

Para dar respuesta a la pregunta *¿cuál es el porcentaje de alumnos que presenta una estatura menor o igual a los 140 cm?*, debemos sumar las frecuencias relativas expresadas en porcentajes de todos los datos menores a 140 cm (que en la tabla anterior hemos puesto en color rojo).

$$5+5+5+5+10+10+25+5+5=75\%$$

Aunque ya hemos dado respuesta a la pregunta que se nos había planteado, notará que en la tabla anterior aparecen muchos datos diferentes (13 en total). Podemos pensar en agruparlos un poco y presentarlos en otra tabla en la que se señalen las estaturas agrupadas por **intervalos**, con el número de veces en que se presentan, cuando hacemos esto decimos que estamos elaborando una **distribución de frecuencias para datos agrupados**.

Cuando un grupo de datos tiene muchos valores diferentes en lugar de pocos valores repetidos, podemos agrupar los valores y construir una **tabla de distribución de frecuencias agrupadas** en *intervalos*. Esta es un resumen de la distribución de frecuencias sin agrupación de datos y es muy útil cuando los datos son muy numerosos y están muy dispersos o presentan frecuencias muy bajas.

Si bien es cierto que al agrupar los datos puede perderse un poco el detalle que ofrece la distribución de frecuencias de datos si agrupar, la distribución de frecuencias para datos agrupados nos permite una lectura más sintetizada de la distribución de los datos.

Para realizar el agrupamiento de los datos se debe realizar lo siguiente:

1. Identificar el dato mayor y el dato menor y determinar el rango ($rango = \text{dato mayor} - \text{dato menor}$), es decir, su diferencia.
2. Seleccionar un número de *intervalos*, así como su *amplitud* (numero de posibles valores que puede tomar la variable discreta), de modo que el producto de éstos sea un poco mayor o igual que el rango.
3. Seleccionar un dato inicial para el primer intervalo, este debe ser igual o un poco menor al dato más pequeño. Sumar a este dato (incluyéndolo) la amplitud para formar el primer intervalo y continuar así hasta conformar todos los intervalos.

Para el caso de las estaturas de los alumnos de primaria:

1. El rango es $rango = \text{dato mayor} - \text{dato menor} = 150 - 121 = 29$.
2. Seleccionamos 3 intervalos con una amplitud de 10, por lo que $3 \times 10 = 30$, de manera que $30 > 29$.
3. Comenzamos el primer intervalo con el dato más pequeño (121 cm), de manera que al sumarle la amplitud nos quede que el primer intervalo va de 121 a 130 cm. Es importante resaltar que al "sumar la amplitud" debemos considerar al propio dato inicial como parte de ella, de tal forma que, si la amplitud es de 10 unidades, sólo debemos sumar 9 unidades más al valor del dato inicial del intervalo pues en el conteo ya estamos considerando el dato inicial que es 121 mas 9 posibles valores más (122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129 y 130) para un total de 10 posibles valores discretos de la variable en el intervalo.

Una vez que tenemos nuestros intervalos, en la columna de la frecuencia absoluta se coloca el número de datos que corresponde a cada intervalo; con estos valores se calculan las frecuencias relativas y sus correspondientes porcentajes.

La distribución de frecuencias de las estaturas de los alumnos, agrupadas en tres intervalos de amplitud igual a 10 queda como se muestra en la tabla de la derecha.

Intervalos de estaturas (cm)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa (%)
121-130	4	0.20	20
131-140	11	0.55	55
141-150	5	0.25	25
	20	**1**	**100**

Nota que con la distribución de frecuencias agrupadas también podemos dar respuesta a la pregunta *¿cuál es el porcentaje de alumnos que presenta una estatura menor o igual a los 140 cm?*, para ello debemos sumar las frecuencias relativas expresadas en porcentajes de los dos primeros intervalos (que en la tabla anterior hemos puesto en color rojo).

$$20 + 55 = 75\%$$

Actividad

Analiza las tablas que se desarrollaron sobre las estaturas de los alumnos de primaria y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál fue la estatura que se presentó con mayor frecuencia y cual fue el valor de esa frecuencia?
2. ¿Cuántos alumnos miden entre 130 cm y 140 cm?
3. ¿Qué porcentaje de alumnos presenta una estatura mayor o igual a los 130 cm?
4. ¿Cuántos alumnos presentan una estatura menor o igual a los 140 cm?
5. ¿Qué porcentaje de alumnos presenta una estatura mayor a los 130 cm?

Se pueden desarrollar tablas de distribución de frecuencias agrupadas distintas a la anterior, esto depende del número de intervalos y amplitud que seleccionemos. En general, todas las tablas de distribución de frecuencias agrupadas deben cumplir con lo siguiente.

Principios básicos para la elaboración de tablas de distribución de frecuencias agrupadas:

1. Cada intervalo debe tener la misma amplitud.
2. Los intervalos deben establecerse de modo que no se traslapen y que cada dato pertenezca a exactamente un intervalo.

Actividad

Para la situación presentada realiza una tabla de distribución de frecuencias agrupadas con seis intervalos y responde las preguntas que se plantean.

Las velocidades, en kilómetros por hora de 30 automóviles rastreados de manera aleatoria en la avenida principal de una ciudad aparecen a continuación.

66	75	61	72	74
78	64	77	51	58
80	76	67	78	74
79	71	57	72	75
71	62	73	59	67
66	68	60	68	65

1. ¿Qué porcentaje de los automóviles presentaron una velocidad mayor a los 70 km/hr?
2. ¿Cuántos automóviles circulaban a velocidades entre los 50 km/hr y 65 km/hr?
3. ¿En qué intervalo de velocidades se presento la mayor frecuencia de automóviles y cuál fue su porcentaje?

Cierre:

Con lo que hemos presentado en esta sesión te pudiste dar cuenta que al organizar los datos en tablas de distribución de frecuencias podemos obtener información muy concreta de los datos que nos arroja un estudio, investigación, observación de un fenómeno natural o social o cualquier situación cotidiana de nuestro interés. También habrás notado que, de acuerdo con las cuestiones que se deseen responder, es a veces más conveniente agrupar los datos en intervalos y desarrollar su distribución de frecuencias agrupadas. Puedes encontrar más información sobre este tema en el enlace que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://formacion.desarrollando.net/cursosFiles/Femz/Curso_209/Leccion_7.2.2.swf

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Un investigador desea determinar cómo varía el peso de un grupo de estudiantes. Selecciona una muestra de 50 estudiantes y registra sus pesos en kilogramos. A continuación se muestra la tabla de distribución de frecuencias de los datos agrupados en 7 clases.

Peso (kg)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
53-55	2	4
56-58	5	**II**
59-61	9	18
62-64	**I**	30
64-67	12	24
68-70	5	10
71-73	2	4
	50	**100**

Selecciona la opción de respuesta que contenga los valores que deben ir en las celdas I y II, respectivamente, para que la tabla se complete correctamente.

A) 15, 12

B) 15, 10

C) 16, 10

D) 16, 12

2. Treinta solicitantes interesados en trabajar para un programa de asistencia social, presentaron un examen diseñado para medir su aptitud para el trabajo social. A continuación se presenta la distribución de frecuencias de las calificaciones del examen.

Intervalos de calificaciones	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa (%)
41-50	2	0.07	7
51-60	3	0.10	10
61-70	4	0.13	13
71-80	5	0.17	17
81-90	9	0.30	30
91-100	7	0.23	23
	30	**1**	**100**

¿Qué porcentaje de los participantes consiguieron el trabajo si la condición era que obtuvieran una calificación mayor a los 80 puntos?

A) 70

B) 53

C) 21

D) 16

3. Durante el mes de junio se registraron las siguientes temperaturas máximas diarias en la ciudad de Guadalajara:

Temperatura °C	Frecuencia relativa
27	0.032
28	0.064
29	0.194
30	0.226
31	0.258
32	0.097
33	0.097
34	0.032

¿En cual de las siguientes opciones se interpreta correctamente la información de la tabla anterior?

A) La temperatura que se presentó con menor frecuencia fue de 28°C por tener el 6.4 % de los registros.

B) El 9.7% de los registros corresponde a 32°C y 33C° de temperatura.

C) El 3.2% de los registros corresponde a 27°C y 34°C de temperatura.

D) La temperatura que se presentó con mayor frecuencia fue de 31° por tener el 25.8% de los registros.

4. En una encuesta se recabó el número de hijos que tienen las familias que viven en una comunidad, los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Número de hijos	Número de familias
0	3
1	9
2	16
3	10
4	3
5	1

¿En cual de las siguientes opciones se interpreta correctamente la información de la tabla anterior?

A) El 28 % de las familias tiene al menos 2 hijos.

B) El 30 % de las familias tiene más de 2 hijos.

C) El 62 % de las familias de la comunidad tiene 2 ó 3 hijos.

D) El 69 % de las familias tiene entre 1 y 4 hijos.

Anexo 1. Clave de respuestas correctas de las evaluaciones

TEMA 1

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	●
2.	○	●	○	○
3.	●	○	○	○
4.	○	○	○	●
5.	○	●	○	○

TEMA 2

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	●
2.	○	●	○	○
3.	○	○	●	○
4.	○	●	○	○
5.	○	●	○	○

TEMA 3

No.	A	B	C	D
1.	○	○	●	○
2.	○	○	○	●
3.	●	○	○	○
4.	○	●	○	○
5.	○	●	○	○

TEMA 4

No.	A	B	C	D
1.	○	●	○	○
2.	○	○	●	○
3.	○	●	○	○
4.	○	○	●	○
5.	○	●	○	○

TEMA 5

No.	A	B	C	D
1.	●	○	○	○
2.	○	○	●	○
3.	○	○	○	●
4.	○	○	○	●
5.	○	○	○	●

TEMA 6

No.	A	B	C	D
1.	○	○	●	○
2.	○	○	○	●
3.	○	●	○	○
4.	○	○	●	○

TEMA EXTRA

No.	A	B	C	D
1.	○	●	○	○
2.	○	●	○	○
3.	○	○	○	●
4.	○	○	●	○

HOJA DE RESPUESTAS	
Nombre	
Escuela	
Grado	
Grupo	

Instrucciones:
Contesta las preguntas de la evaluación de cada tema presentado, rellenando con lápiz el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

TEMA 1

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 2

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 3

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 4

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 5

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 6

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○

TEMA EXTRA

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○

SECRETARÍA
DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE
GUANAJUATO