Desarrollo de Habilidades Matemáticas

SECUNDARIA

2do. Grado

SECRETARÍA
DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE
GUANAJUATO

Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Segundo grado de secundaria fue desarrollado por la Dirección de Medios y Métodos Educativos, de la Dirección General para la Pertinencia y la Corresponsabilidad de la Educación, Secretaría de Educación de Guanajuato.

Secretaría de Educación de Guanajuato

Subsecretaría para el Desarrollo Educativo

Dirección General para la Pertinencia y la Corresponsabilidad de la Educación

Dirección de Medios y Métodos Educativos

Departamento de Matemáticas

Primera edición, 2012

Secretaría de Educación de Guanajuato, 2012
Conjunto Administrativo Pozuelos s/n, Centro,
36000, Guanajuato, Gto.

Impreso en México

Presentación

A las maestras y maestros:

La evaluación es un proceso necesario para identificar los aprendizajes que las alumnas y los alumnos han adquirido satisfactoriamente y aquellos que deberán ser reforzados.

Año con año, la Secretaría de Educación Pública aplica la prueba ENLACE a todas las primarias y secundarias del país, para tener información sobre el desempeño escolar de los alumnos.

En este contexto, ***Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Segundo grado de secundaria*** es un material que tiene como propósito ofrecerles una herramienta de apoyo que les permita guiar a sus alumnos en la preparación para la prueba ENLACE 2012, a través de una serie de actividades elaboradas con base en el programa de estudio de matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2011.

Los invitamos a que aprovechen este recurso y que apoyen a sus alumnos en el uso del mismo, de modo que les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora. Para ello, les sugerimos atender las ***Orientaciones metodológicas*** que se encuentran en este cuadernillo.

Estamos seguros de que con su compromiso y colaboración continuaremos trabajando para hacer de Guanajuato un estado de acciones encaminadas a mejorar la calidad de la educación.

A las alumnas y alumnos:

La evaluación es un elemento necesario en tu proceso de aprendizaje, ya que mediante ella te es posible detectar cuáles son los temas y contenidos que dominas y aquellos que necesitas fortalecer.

La prueba ENLACE, que año con año se aplica a todas las primarias y secundarias del país, tiene la finalidad de evaluar tus conocimientos en el área de español, matemáticas y una tercera asignatura, y ofrecerte un diagnóstico individual sobre los conocimientos y habilidades en los temas evaluados.

Durante este ciclo escolar, la Secretaría de Educación de Guanajuato pone a tu disposición el material ***Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Segundo grado de secundaria***, el cual fue elaborado con el propósito de servirte como una herramienta de preparación para la prueba Enlace 2012. Este cuadernillo contiene una serie de actividades elaboradas con base en el programa de estudio de matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2011.

Es importante que para realizar el trabajo que te propone este cuadernillo, te apoyes en tu maestro de la asignatura de matemáticas, ya que él te podrá orientar en el uso del mismo.

Recuerda que la evaluación es un complemento de tu aprendizaje, por lo que te invitamos a considerar este proceso como una oportunidad para analizar tu desempeño escolar.

¿Cómo está organizado el cuadernillo de apoyo?

El cuadernillo está diseñado por temas. Cada lección iniciará con la siguiente información:

Bloque del programa de estudio que incluye el tema a revisar.

Aprendizaje que el alumno debe adquirir en ese bloque, eje temático y tema, de acuerdo al programa de estudio.

Tema del que tratará la lección.

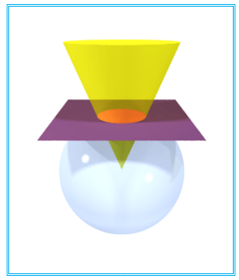
Eje temático al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

Tema general al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

Subtema específico al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

TEMA 5. CORTES EN ESFERAS Y CONOS

Bloque V
Eje temático: Forma, espacio y medida **Tema:** Formas geométricas **Subtema:** Cuerpos geométricos **Resultado general de aprendizaje:** Anticipa cómo cambia el volumen de esferas, cilindros y conos al aumentar o disminuir alguna de sus dimensiones.
Resultado específico de aprendizaje: Determina la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto.



Aprendizaje específico que se desea lograr en la lección.

Presenta una **imagen** alusiva al tema.

Cada tema incluye cuatro secciones que se describen a continuación:

Introducción 

Consiste en el planteamiento general del tema que se va a trabajar. Esta sección incluye una situación cotidiana que permite retomar los conocimientos previos sobre el tema.

Desarrollo 

Constituye la parte más amplia del tema, ya que contiene la presentación de contenidos y actividades que permiten fortalecer los aprendizajes que serán evaluados.

Cierre 

Incluye una breve descripción de los contenidos retomados en la lección. También contiene sitios de interés que se pueden consultar para ampliar los conocimientos sobre el tema.

Evaluación 

En esta sección se deberá resolver una evaluación sobre los contenidos retomados en la lección. Es importante que se utilice la ***Hoja de respuestas*** que se encuentra en la parte posterior del cuadernillo, ya que es necesario practicar el llenado de los círculos que presenta la prueba tipo ENLACE.

Orientaciones metodológicas

Este cuadernillo ha sido diseñado con la finalidad de que los alumnos procesen la información y desarrollen las actividades y evaluaciones contenidas en cada uno de los temas, de manera individual, empleando tiempo extra clase. Sin embargo, será de gran apoyo las orientaciones y retroalimentaciones que puedan obtener de la maestra o maestro que les imparte la asignatura de matemáticas.

En este sentido, se solicita a las maestras y los maestros que atiendan a las siguientes orientaciones metodológicas, para apoyar muy comprometidamente a sus alumnos, de modo que este recurso didáctico les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora.

- En un primer momento, acompañar a los alumnos en la lectura de la presentación y organización del cuadernillo. Identificar y comentar con ellos las temas específicos que han sido desarrollados. Esto se puede hacer de manera grupal en un espacio de clase no mayor a 10 minutos.

- Previo al estudio de un tema:

  Presentar la situación planteada en la introducción. Esto con la intención de generar una activación cognitiva en los alumnos en relación con la temática a estudiar.

  Orientar la atención de los alumnos sobre los aspectos del tema en los que deberán poner especial cuidado al momento de procesar la información y realizar las actividades y evaluaciones plantedas.
  Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 7 minutos.

- Posterior al estudio de un tema:

  Retroalimentar el aprendizaje de los alumnos mediante una actividad grupal en la que hagan una recapitulación breve sobre el desarrollo de las actividades y las soluciones de la evaluación. Esto con la intención de socializar el aprendizaje individual de los alumnos y resolver las dudas que se presenten.
  Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 12 minutos.

Esperamos que estas orientaciones sean de utilidad para lograr el fortalecimiento de los temas clave que contiene el cuadernillo y generar la adquisición de los aprendizajes esperados en los alumnos.

Contenido

TEMA 1. PROPORCIONALIDAD MÚLTIPLE

Bloque I

Eje temático: Manejo de la información

Tema: Análisis de la información

Subtema: Relaciones de proporcionalidad

Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas de valor faltante considerando más de dos conjuntos de cantidades.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas de valor faltante que impliquen al menos tres conjuntos de cantidades, empleando procedimientos de proporcionalidad múltiple.

Introducción:

Para hacer un regalo, Roció ha comprado una caja de forma cuadrangular, es decir, tiene la forma de un prisma cuadrangular la cual mide de base 4 centímetros por lado, y tiene una altura de 8 centímetros, por tanto su volumen es de 128 centímetros cúbicos. Pero la mamá de Rocío necesita una caja más grande, que tenga de base 12 centímetros por lado y una altura de 24 centímetros, es decir, el triple de las dimensiones de la caja anterior. ¿Cuánto de volumen tendrá la caja con estas últimas medidas?

Existen problemas donde intervienen más de dos relaciones de proporcionalidad, mismas que pueden o no tener el mismo sentido, es decir, no necesariamente tienen que ser todas de proporcionalidad directa o inversa. En este tema aprenderás cómo resolver problemas en los cuales hay dos más conjuntos de cantidades que se encuentran en proporción directa o proporción inversa con otra cantidad. A este tipo de problemas se les llama problemas de **proporcionalidad múltiple.**

Desarrollo:

A continuación te presentamos información necesaria para poder resolver problemas como el de la introducción. Se resolverán algunos ejercicios acerca de diferentes situaciones de la vida cotidiana donde es necesaria una solución de esta naturaleza. Concluiremos con algunos ejercicios donde tendrás la oportunidad de aplicar lo aprendido.

Las proporciones y el volumen

Al calcular el volumen de algunos objetos geométricos estamos en una de las situaciones en las que surgen problemas de proporcionalidad múltiple.

Por ejemplo, con el prisma rectangular de la derecha, al hacer variaciones en alguna de sus dimensiones, podemos completar la siguiente tabla:

Largo del prisma (cm)	Ancho del prisma (cm)	Altura del prisma (cm)	Volumen del prisma (cm^3)
8	4	6	**192**
16	4	6	**384**
4	4	6	**96**
2	4	6	**48**

*El **volumen** de un prisma rectangular se calcula multiplicando el largo por el ancho por la altura del prisma, es decir,*

Recuerda

$$V = \text{Largo} \times \text{Ancho} \times \text{Altura}$$

En la tabla anterior se puede observar que el ancho y la altura del prisma permanecen fijas mientras que el largo está variando, por tanto el volumen también está variando. Observa que si el **largo** aumenta lo doble el volumen también aumenta lo doble, si disminuye a la mitad el largo el volumen también disminuye a la mitad, por tanto se tiene que el largo del prisma y el volumen son dos cantidades directamente proporcionales y, en este caso, la constante de proporcionalidad es 24 (cociente de el volumen y el largo).

*Dos conjuntos de cantidades son **directamente proporcionales** si al aumentar una cantidad la otra también aumenta en la misma proporción o si una disminuye, la otra cantidad también disminuye en la misma proporción. Dos conjuntos de cantidades son **inversamente proporcionales**, cuando al aumentar una cantidad al doble, triple, etc., la otra cantidad correspondiente disminuye a la mitad, triple, etc., o viceversa.*

Recuerda

Ahora, si variamos la altura del prisma y dejamos fija la medida del ancho y largo, se tiene la siguiente tabla:

Largo del prisma (cm)	Ancho del prisma (cm)	Altura del prisma (cm)	Volumen del prisma (cm^3)
8	4	6	**192**
8	4	12	**384**
8	4	18	**576**
8	4	3	**96**

Observa que, si la **altura** del prisma aumenta lo doble el volumen también aumenta lo doble, si aumenta al triple la altura también el volumen aumenta al triple. Por tanto, en este caso la altura y el volumen del prisma son también cantidades directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 32 (cociente de el volumen y la altura).

Las situaciones de **proporcionalidad múltiple** se caracterizan por que dos o más cantidades se encuentran relacionadas proporcionalmente con otra cantidad.

En el ejemplo del prisma rectangular vimos que hay proporcionalidad directa entre una medida y el volumen si dejamos fijas a las otras dos.

Otra situación que tenemos de proporcionalidad múltiple es cuando variamos dos medidas a la vez. Refiriéndonos al mismo prisma, veamos la siguiente tabla:

Largo del prisma (cm)	Ancho del prisma (cm)	Altura del prisma (cm)	Volumen del prisma (cm^3)
8	4	6	**192**
16	4	12	**768**
32	4	18	**2304**
4	4	3	**48**

Observa que el volumen con respecto a las medidas originales del prisma aumenta cuatro veces si el largo y la altura del prisma aumentan lo doble, que aumenta nueve veces si las respectivas medidas que estamos variando aumentan lo triple y finalmente que la medida del volumen disminuye cuatro veces si el largo y la altura del prisma disminuyen a la mitad. Pero, ¿de dónde se obtiene ese número de veces corresponde aumentar o disminuir al volumen?

En el caso en que el volumen aumenta cuatro veces, se debe a que el largo del prisma aumentó 2 veces su medida original y también la altura aumento 2 veces, por tanto multiplicamos estos números, es decir $2 \times 2 = 4$. Cuando el volumen aumenta nueve veces es por que el largo y la altura del prisma aumentan tres veces, es decir $3 \times 3 = 9$. Cuando el volumen del prisma original disminuye cuatro veces, se debe a que tanto el largo como la altura del prisma original disminuyen a la mitad de la medida original, así $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

De la misma forma, si todas las dimensiones del prisma aumentan al triple entonces, el volumen del prisma que se obtiene es 5184 cm^3. El volumen del prisma original aumentó 27 veces ($27 \times 192 = 5184$), ya que cada dimensión del prisma original aumentó 3 veces, luego $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Si el largo y el ancho del prisma aumentan lo doble y la altura aumenta lo triple, entonces el volumen del nuevo prisma es 2304 cm^3. El volumen del prisma aumentó 12 veces ya que $2 \times 2 \times 3 = 12$, así $12 \times 192 = 2304$.

Si el largo del prisma disminuye cuatro veces y el ancho aumenta 3 veces, entonces el volumen del nuevo prisma es 144 cm^3. El número de veces que se debe multiplicar el volumen del prisma original es $\frac{3}{4}$, ya que disminuir 4 veces y aumentar 3 veces las medidas correspondientes del prisma significa que debemos multiplicar $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$. Por tanto $\frac{3}{4} \times 92 = 144$.

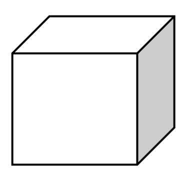
En algunas situaciones de proporcionalidad múltiple, como en la del prisma rectangular, si dos o mas de las cantidades varían al mismo tiempo, por ejemplo si el largo aumenta m veces y al mismo tiempo la altura aumenta n veces, pero el ancho del prisma permanece fijo, entonces el volumen del prisma original aumenta $m \times n$ veces. Más aun, si el ancho del prisma también aumenta p veces, entonces el volumen del prisma original aumenta $m \times n \times p$ veces.

Actividad

De acuerdo a las medidas del prisma cuadrangular de la derecha responde lo siguiente

a) Si los lados de la base aumenta al triple, ¿cuál es volumen del prisma que se obtiene?

b) Si uno de los lados de la base del prisma aumenta al doble y la altura disminuye al triple, ¿cuál es volumen del prisma que se obtiene?



Lado de la base: 2 cm
Altura: 4 cm
Volumen: 16 cm^3

El ejemplo que te mostramos a continuación corresponde a una situación de proporcionalidad múltiple en la que los conjuntos de cantidades involucradas se relacionan en proporcionalidad tanto directa como inversa.

Miguel tiene una semana que entró a trabajar a una empresa de banquetes y para el próximo evento su jefe le pidió que se hiciera cargo de preparar suficiente agua de frutas para ofrecer a los invitados. Si en su primer evento Miguel notó que durante 6 horas los invitados de 12 mesas consumieron 144 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua deberá prepara Miguel si este evento durará 3 horas y se pondrán 60 mesas para los invitados?

Para solucionar este problema es útil elaborar la siguiente tabla:

Horas que dura el evento	Número de mesas	Litros de agua
6	**12**	144
12	**12**	288
3	**12**	72
2	36	**144**
3	24	**144**
12	6	**144**
18	4	**144**
1	1	2

De la tabla anterior se tiene que para 12 mesas durante 3 horas se necesitan 72 litros de agua, por tanto para 60 mesas $12 \times 5 = 60$, debemos multiplicar el número de litros correspondiente por 5 también, $72 \times 5 = 360$, lo que significa que Miguel deberá preparar 360 litros de agua para atender a las 60 mesas durante las 3 horas que dura el evento.

Más aun, de la tabla anterior se pueden hacer las siguientes observaciones:

a) En los renglones coloreados de azul, si dejamos fijo el número de mesas entonces, el número de horas del evento y la cantidad de agua son **directamente proporcionales**, la constante de proporcionalidad es 24 (el cociente de los pares de cantidades).

b) En los renglones coloreados de verde, si dejamos fijo el número de litros de agua entonces, el número de horas del evento y el número de mesas son cantidades **inversamente proporcionales**, la constante de proporcionalidad inversa es 72 (el producto de los pares de cantidades).

c) En el renglón de color naranja se tiene el valor que corresponde a las unidades, lo cuál quiere decir que en 1 mesa, durante una hora se consumen 2 litros de agua, por tanto, si queremos calcular la cantidad de agua para 60 mesas durante 3 horas se debe multiplicar $2 \times 3 \times 60 = 360$ y obtenemos la misma solución.

Cuando se tratan problemas de proporcionalidad múltiple puede suceder que, cuando una de las cantidades permanece fija las otras dos cantidades son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

Una de las técnicas útiles para resolver problemas de proporcionalidad múltiple es encontrar el valor que corresponde a las **unidades**. Para ello dejamos fija la primera cantidad y reducimos la segunda hasta la unidad, modificando los valores de la tercera cantidad en la proporción correspondiente. Después hacemos la reducción hasta la unidad de la segunda cantidad.

Actividad

Para una excursión, se calcula que se necesitan 20 litros de agua a diario para cada 3 niños que participan. Con esta información responde lo siguiente:

a) ¿Cuántos litros de agua se necesitan, si la excursión es durante una semana y participan 120 niños?
b) Si se deja fijo el número de niños, ¿Qué tipo de proporcionalidad se tiene entre el número de días y la cantidad de agua? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad correspondiente?
c) Si en la excursión participan 60 niños, ¿Cuántos litros de agua se necesita para una semana?

Reconsideremos ahora la situación planteada en la introducción:

"Para hacer un regalo, Roció ha comprado una caja de forma cuadrangular, es decir, tiene la forma de un prisma cuadrangular la cual mide de base 4 centímetros por lado, y tiene una altura de 8 centímetros, por tanto su volumen es de 128 centímetros cúbicos. Pero la mamá de Rocío necesita una caja más grande, que tenga de base 12 centímetros por lado y una altura de 24 centímetros, es decir, el triple de las dimensiones de la caja anterior. ¿Cuánto de volumen tendrá la caja con estas últimas medidas?"

De acuerdo con lo que hemos visto, debemos calcular el número por el que se debe multiplicar el volumen del prisma original para obtener el volumen del nuevo prisma. Como las dimensiones del prisma aumentaron cada una al triple y tenemos tres medidas que son, el largo, ancho y altura del prisma, multiplicamos por $3\times 3\times 3=27$ veces, que es el número que buscamos, por tanto el volumen que tendrá la caja con las nuevas medidas es $27\times 128=3456\text{ cm}^3$.

Nota que, si calculamos el volumen del nuevo prisma aplicando la fórmula obtenemos que $12\times 12\times 24=3456$, que es la misma respuesta, pero resulta más práctico aplicar el procedimiento de proporcionalidad múltiple.

Cierre:

En este tema te hemos presentamos algunas maneras de resolver problemas de proporcionalidad múltiple. Con los ejemplos presentados y actividades desarrolladas pudiste notar que incluso se presentan problemas en los que se puede tener a la vez una proporcionalidad directa y otra proporcionalidad inversa. En particular se resolvieron problemas de calcular el volumen de un prisma rectangular y calcular cómo varia el volumen cambiando las dimensiones del prisma.

Recuerda que en este tipo de problemas siempre es de mucha utilidad encontrar el valor que corresponde a las **unidades**. Para ello dejamos fija la primera cantidad y reducimos la segunda hasta la unidad, modificando los valores de la tercera cantidad en la proporción correspondiente. Después hacemos la reducción hasta la unidad de la segunda cantidad.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b01_t08_s01_descartes/TS_1_index.html

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b01_t07_s01_descartes/TS_1_index.html

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta.

1. Se tiene un prisma que mide 4 cm de largo, 3 cm de ancho y 6 cm de alto, por lo que su volumen es 72 cm^3. Si se tiene otro prisma con el doble del largo, el triple del ancho y una altura 4 veces mayor, ¿cuál es el volumen del nuevo prisma en cm^3?

A) 288

B) 648

C) 1728

D) 1944

2. Se tiene un prisma con un volumen de 160 cm^3. Si tenemos un segundo prisma con la mitad de altura del anterior pero con un ancho del triple del anterior. ¿Cuál es el volumen del segundo prisma en cm^3?

A) 240

B) 320

C) 480

D) 960

3. En el campo 10 tractores consumen durante 6 horas de trabajo 360 litros de gasolina. Si se descompone 4 tractores y se quiere consumir la misma gasolina, ¿cuántas horas deberán operar los tractores restantes?

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

4. Para construir un muro en una escuela se han contratado 5 albañiles para su construcción. Si dos albañiles construyeron un muro de 12 m^2 de superficie en 3 horas y suponiendo que el trabajo es proporcional, ¿Qué superficie en m^2 construirán los 5 albañiles contratados en 4 horas?

A) 16

B) 40

C) 48

D) 60

5. En una fábrica donde se elaboran vestidos, 30 máquinas tejen 2400 metros de tela en 20 días, ¿Cuántos metros de tela se tejen en 14 días si se ocupan 15 máquinas iguales?

A) 400

B) 840

C) 1200

D) 1680

TEMA 2. PRISMAS Y PIRÁMIDES

Bloque II

Eje temático: Forma, espacio y medida

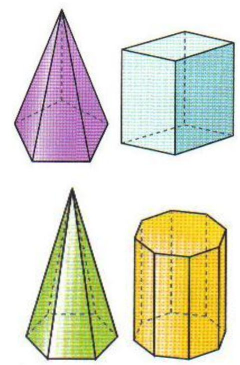
Tema: Medida

Subtema: Estimar, medir y calcular

Resultado general de aprendizaje: Estima y calcula el volumen de prismas y pirámides rectos.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que impliquen el cálculo del volumen de prismas rectos o pirámides, o cualquiera de sus elementos.



Introducción:

Durante una clase, la maestra Lupita entregó a cada uno de sus alumnos un trozo de cartulina y un par de pentágonos de 5 cm de lado y área igual a 43 cm^2. Enseguida les pidió que cortaran de la cartulina las 5 caras laterales que hacían falta, de manera que pudieran construir un prisma pentagonal que tuviera un volumen de 645 cm^3. ¿Cuál es la medida de la altura del prisma que construyeron los alumnos y cuánto mide su área total?

Si observas la situación anterior, notarás que se está hablando del **volumen** y áreas de un cuerpo geométrico conocido como prisma. Para responder a las preguntas planteadas es necesario saber un poco sobre cuerpos geométricos. A continuación presentamos algunos conceptos importantes relacionados con los cuerpos geométricos conocidos como **prismas y pirámides**.

Desarrollo:

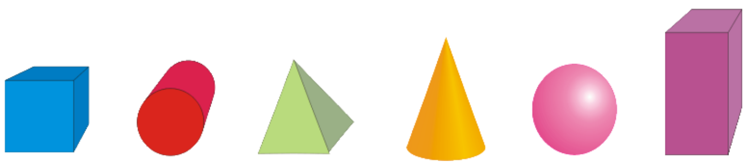
Frecuentemente nos encontramos en la vida cotidiana con distintos cuerpos geométricos que tienen una forma y características bien conocidas y definidas dentro del campo de la geometría. Así por ejemplo un dado tiene la forma de un cubo, una lata de refresco tiene la forma de un cilindro, un ladrillo tiene la forma de un prisma, una casa de campaña tiene la forma de pirámide, etc.

A continuación haremos un repaso breve sobre cuerpos geométricos y describiremos las características de dos de los grupos de cuerpos geométricos más importantes, los prismas y las pirámides.

Los cuerpos geométricos

Todo lo que percibimos son objetos de tres dimensiones; todos los seres y objetos de la naturaleza y todos los artefactos elaborados en las distintas culturas, son tridimensionales pues ocupan un lugar en el espacio físico.

Los ***cuerpos geométricos*** son objetos tridimensionales que tienen ciertas particularidades, ciertas formas más sencillas, más elementales, más regulares; por ejemplo, los que presentan caras externas constituidas por polígonos o círculos, o los que tienen una forma parcial o totalmente redonda. En este grupo quedan los objetos que tienen la apariencia de cajas, pirámides, prismas, cilindros, conos, esferas, etc.

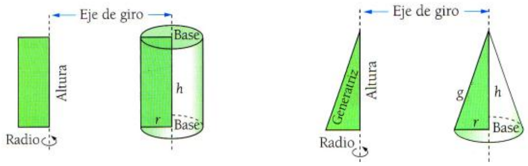


*Los cuerpos geométricos también suelen ser denominados como **sólidos**. Esta denominación es válida, aunque no debe sugerir la idea de que tales cuerpos tienen que estar "llenos" interiormente, o tienen que ser "duros"; una caja de zapatos vacía y cerrada es también un ejemplo de cuerpo geométrico.*

Clasificación de los cuerpos geométricos

Un criterio básico para clasificar los cuerpos geométricos se refiere a la *naturaleza de sus caras exteriores*. De esta forma tenemos:

- Los ***cuerpos redondos*** o ***sólidos de revolución***, cuerpos geométricos formados por la revolución completa de una figura plana (llamada generatriz) alrededor de un eje de giro.

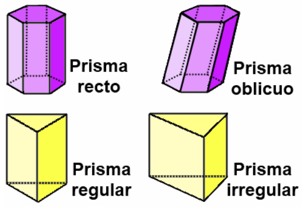


- Los ***poliedros*** (poliedro = polus [mucho]+ hedra [cara] = muchas caras) son cuerpos geométricos limitados por un número finito de **polígonos.** Estos polígonos reciben el nombre de *caras* del poliedro, a la intersección de dos caras se le conoce como *arista* y al punto de intersección de más de dos caras como *vértice*.

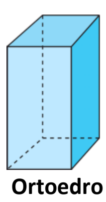
Prismas

Los **prismas** son poliedros que poseen dos caras congruentes (*bases*) ubicadas en planos paralelos y con sus aristas homólogas paralelas, de tal modo que las demás caras (*caras laterales*) son paralelogramos.

Cuando las aristas de esas caras laterales son perpendiculares a las bases, se habla de ***prismas rectos***; en caso contrario, se trata de ***prismas oblicuos***. Las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos; la de los prismas oblicuos, romboides (o rombos). Se denomina ***altura*** del prisma a la distancia entre las dos bases. Un prisma se califica como ***regular*** cuando es recto y sus bases son polígonos regulares

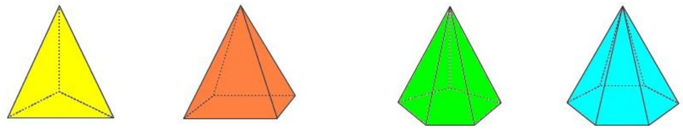


Los ***paralelepípedos*** (paralelepípedo = parallellos [paralelos] + epipedon [plano]) son prismas cuyas bases son paralelogramos; por consiguiente y como su nombre lo indica, poseen dos pares de caras laterales paralelas y congruentes. Las bases pueden ser rombos, romboides o rectángulos. En este último caso (que incluye también el de las bases cuadradas) el paralelepípedo recibe el nombre de ***ortoedro*** (ortoedro = orto [recto] + hedra [cara]), prisma que posee todas sus caras rectangulares; el ortoedro debe ser pues un paralelepípedo recto, no oblicuo. El cubo viene a ser un ortoedro regular, pero no es el único.



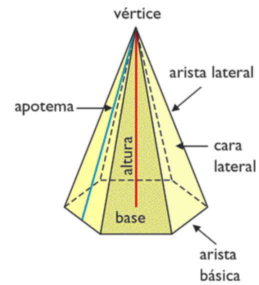
Pirámides

Las **pirámides** son poliedros con una sola base poligonal y caras laterales triangulares, que se unen en un punto denominado *vértice* de la pirámide. El número de lados del polígono de la base (o, lo que es lo mismo, el número de caras triangulares laterales) determina el tipo de pirámide: triangular (llamada tetraedro), cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.



Triangular **Cuadrangular** **Pentagonal** **Hexagonal**

Una pirámide se califica como ***regular*** (o recta) si el polígono de la base lo es y los triángulos laterales son todos isósceles y congruentes. El **tetraedro** regular es un caso particular, ya que los cuatro triángulos son equiláteros.



Se denomina ***altura*** de la pirámide a la distancia entre el vértice y la base, mientras que la ***apotema*** es la altura de cualquiera de los triángulos isósceles de las caras laterales.

Superficies de los prismas y pirámides

Son diversas las superficies de los cuerpos geométricos, susceptibles de ser medidas.

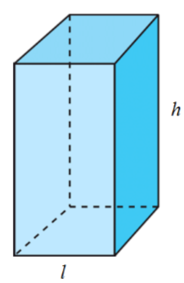
Por **área** entendemos la medida de una superficie. Así, por ejemplo en los prismas y pirámides, hablamos del **área de las bases**, del **área lateral** y del **área total** cuando se trata de la suma de las dos anteriores.

En el caso de los prismas y pirámides cuando hablamos del área total nos estamos refiriendo al área de toda su superficie externa y, para no llenarte de fórmulas, diremos simplemente que en cada caso hay que evaluar la figura en cuestión, precisar los ***polígonos que forman las bases***, y los ***polígonos de las caras laterales***, tomar en cuenta los datos que se aportan, y hallar el área de la superficie solicitada empleando las fórmulas adecuadas.

Ejemplo 1:

Calcular el área total de un **ortoedro de base cuadrada** de 8 cm de lado y 20 cm de alto.

Un ortoedro es un prisma recto que tiene como base un rectángulo o cuadrado, en este caso la base es un cuadrado de lado $l = 8\text{ cm}$ y sabemos que la altura de los rectángulos laterales es $h = 20\text{ cm}$. Este ortoedro se ilustra en la figura de la derecha.



Para calcular el área total, A_t, debemos sumar el área de los polígonos que forman las bases, A_b, con el área de los polígonos de las caras laterales, A_l, es decir $A_t = A_b + A_l$.

Las bases están formadas por 2 cuadrados de lado $l = 8\text{ cm}$, por lo que el área de las bases queda como

$$A_b = l \times l + l \times l = l^2 + l^2 = 2l^2 = 2(8\text{ cm})^2 = 2\left(64\text{ cm}^2\right) = 128\text{ cm}^2$$

Recuerda

El área de un cuadrado se calcula multiplicando lado por lado

$$A_{cuadrado} = l \times l = l^2.$$

Las caras laterales están formadas por 4 rectángulos de lado $l = 8\text{ cm}$ y altura $h = 20\text{ cm}$, por lo que el área de las caras laterales queda como

$$A_l = l \times h + l \times h + l \times h + l \times h = 4(l \times h) = 4(8\text{ cm} \times 20\text{ cm}) = 4\left(160\text{ cm}^2\right) = 640\text{ cm}^2$$

El área de un rectángulo se calcula multiplicando su largo por su alto

Recuerda

$$A_{rectángulo} = l \times h \, .$$

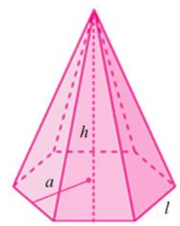
Por lo que el área total se obtiene de la suma del área de las bases y el área de las caras laterales

$$A_t = A_b + A_l = 128 \text{ cm}^2 + 640 \text{ cm}^2 = 768 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 2:

Calcular el área total de una **pirámide regular hexagonal** cuya base tiene 10 cm de lado y apotema de 8.66 cm, mientras que los triángulos laterales tienen una altura de 24.5 cm.

La pirámide regular hexagonal tiene como base un hexágono (que es un polígono regular de 6 lados) y, por consiguiente, son seis los triángulos isósceles que conforman sus caras laterales. Esta pirámide se ilustra en la figura de la derecha.



Para calcular el área total, A_t, debemos sumar el área de la base A_b, con el área de los polígonos de las caras laterales, A_l, es decir $A_t = A_b + A_l$.

La base está formadas por un hexágono de lado $l = 10 \text{ cm}$ y apotema $a = 8.66 \text{ cm}$, por lo que el área de las bases queda como

$$A_b = \frac{p \times a}{2} = \frac{6l \times a}{2} = \frac{6(10 \text{ cm})(8.66 \text{ cm})}{2} = \frac{519.6 \text{ cm}^2}{2} = 259.8 \text{ cm}^2$$

El área de un polígono se calcula multiplicando su perímetro por su apotema y dividiendo entre dos

Recuerda

$$A_{polígono} = \frac{p \times a}{2} \, .$$

Las caras laterales están formadas por 6 triángulos isósceles cuya base b es igual al lado del hexágono, es decir, $b = l = 10 \text{ cm}$ y su altura es $h = 24.5 \text{ cm}$, por lo que el área de las caras laterales queda como

$$A_l = \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} = 6\left(\frac{b \times h}{2}\right) = 6\left(\frac{10 \text{ cm} \times 24.5 \text{ cm}}{2}\right) = 6\left(122.5 \text{ cm}^2\right) = 735 \text{ cm}^2$$

El área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo entre dos

Recuerda

$$A_{triángulo} = \frac{b \times h}{2} \, .$$

Por lo que el área total se obtiene de la suma del área de la base y el área de las caras laterales

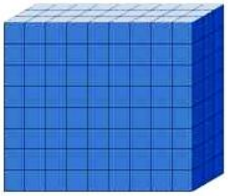
$$A_t = A_b + A_l = 259.8 \text{ cm}^2 + 768 \text{ cm}^2 = 1027.8 \text{ cm}^2$$

Volumen de cuerpos geométricos

Medir el volumen de un cuerpo geométrico significa asignar un valor al ***espacio ocupado por el mismo***. Como en el caso de cualquier medición, esto se consigue comparando ese espacio ocupado con el de una **unidad de volumen**.

La **unidad de volumen** es la de un cubo cuya *arista* mida 1 unidad (u) de longitud (puede ser 1 cm, 1 m, etc.). Se dice que este ***cubo unitario*** tiene un volumen de 1 unidad cúbica (1 u^3).

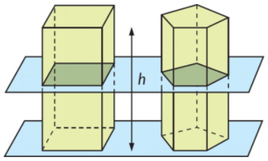
Si por ejemplo, se desea medir el ***volumen de un paralelepípedo*** hay que averiguar cuántos cubos unitarios contiene; esto se puede conseguir dividiéndolo adecuadamente, como el de la figura siguiente.



Luego, hay que contar ordenadamente el número de cubos unitarios. Para ello, procedemos a averiguar cuántos hay en un "piso", por ejemplo, el de la base, que tiene nueve filas de tres cubos (o tres filas de nueve cubos), lo que da un total de 27 cubos unitarios. Ahora, sólo falta contar cuántos "pisos" tiene el paralelepípedo: ocho. Por consiguiente, el paralelepípedo de la figura contiene 216 cubos unitarios; su volumen es, pues, 216 u^3.

De aquí podemos inferir que si las dimensiones de las aristas del paralelepípedo son a, b y c, su volumen vendrá dado por $V = a \times b \times c$. Como un caso particular, el ***volumen de un cubo de arista*** a será $V = a^3$.

Volumen de prismas



El procedimiento que hemos utilizado para calcular el volumen de un paralelepípedo se puede extender al caso de los prismas, ya que éstos comparten la siguiente propiedad: *cualquier plano que corte al cuerpo perpendicularmente a las aristas (en el prisma), da como intersección una figura congruente con la base respectiva.* Tal como se observa en la figura de la derecha.

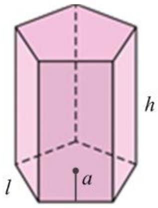
Así, podemos imaginar que el espacio interior de los prismas puede ser *generado* por la figura de la base moviéndose en un "ascensor" perpendicular a dicha base a lo largo de la altura, y llenando ese espacio a cada paso con su propia figura.

De aquí surge la idea de considerar que

> El **volumen de los prismas** es el resultado de multiplicar el área de la base por su altura del cuerpo. Así pues, el volumen viene dado por
>
> $$V_{prisma} = \text{Área de la base} \times \text{altura}$$

Ejemplo 3:

Calcular el volumen de un **prisma recto pentagonal** de 18 cm de altura, cuyas bases miden 8 cm de lado y tienen una apotema de 5.5 cm.



El prisma recto pentagonal tiene como base un pentágono (que es un polígono regular de 5 lados) y, por consiguiente, son cinco los rectángulos que conforman sus caras laterales. Este prisma se ilustra en la figura de la derecha.

Para calcular el volumen del prisma debemos multiplicar su altura por el área de su base mediante la siguiente expresión

$$V_{prisma} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = \frac{p \times a}{2} \times h = \frac{5l \times a}{2} \times h$$

Si sustituimos $l = 8 \text{ cm}$, $a = 5.5 \text{ cm}$ y $h = 18 \text{ cm}$ en la formula anterior tenemos que el volumen del prisma es

$$V_{prisma} = \frac{5l \times a}{2} \times h = \frac{5(8 \text{ cm}) \times (5.5 \text{ cm})}{2} \times 18 \text{ cm} = 110 \text{ cm}^2 \times 18 \text{ cm} = 1980 \text{ cm}^3$$

Volumen de pirámides

Para que puedas comprobar tú mismo lo que aquí vamos a establecer en relación al volumen de las pirámides realiza los que a continuación se indica.

Actividad

1. Recorta los patrones del prisma pentagonal y la pirámide pentagonal que aparecen en el Anexo 2 al final del cuadernillo. Nota que en ambos cuerpos geométricos el área de la base y la altura son iguales.
2. Para cada uno de los cuerpos geométricos que recortaste, realiza los dobleces de sus caras laterales y únelas a través de la *pestaña* que sobresale en una de las aristas de uno de los extremos (puedes untar pegamento en la pestaña para unir las caras laterales).
3. Para la pirámide no unas la base a las caras laterales y para el prisma une solamente una de las bases a las caras laterales.
4. Llena la pirámide de arena o de azúcar (o de otro material diminuto) y vacíala dentro del prisma. Repite el paso anterior dos veces más (para un total de tres veces).

¿Qué puedes concluir después de haber realizado el experimento anterior?

Con el experimento anterior debiste notar que el contenido (volumen) de tres pirámides es equivalente al contenido (volumen) del prisma. En términos geométricos esto quiere decir que

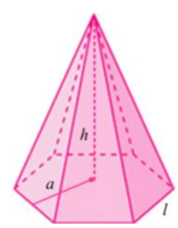
El **volumen de una pirámide** es la tercera parte del volumen de un prisma que tenga la misma base y la misma altura de la pirámide considerada. Es decir,

$$V_{pirámide} = \frac{\text{Área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

Ejemplo 4:

Calcular el volumen de una **pirámide regular hexagonal** de 25 cm de altura y cuya base tiene 10 cm de lado y apotema de 8.6 cm.

La pirámide regular hexagonal tiene como base un hexágono (como la mostrada en la figura de la derecha) y, para calcular su volumen, debemos multiplicar el área de su base por su altura y dividir entre tres, esto lo hacemos mediante la expresión



$$V_{pirámide} = \frac{\text{Área de la base} \times \text{altura}}{3} = \frac{\frac{p \times a}{2} \times h}{3} = \frac{\frac{6l \times a}{2} \times h}{3} = \frac{6l \times a \times h}{6} = l \times a \times h$$

Si sustituimos $l = 10 \text{ cm}$, $a = 8.66 \text{ cm}$ y $h = 25 \text{ cm}$ en la formula anterior tenemos que el volumen del prisma es

$$V_{pirámide} = l \times a \times h = 10 \text{ cm} \times 8.66 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} = 2165 \text{ cm}^3$$

Actividad

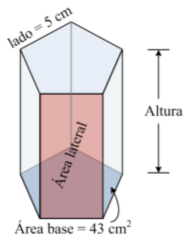
Realiza una figura y calcula el área total y el volumen de cada uno de los siguientes cuerpos geométricos:

1. Prisma regular triangular con una altura de 10 cm y cuya base tiene 6 cm de lado y 5.2 cm de alto.
2. Prisma hexagonal con una altura de 10 cm y cuya tienen 6 cm de lado y 5.2 cm de apotema.
3. Pirámide recta cuadrangular de 10 cm de alto y cuya base tiene 6 cm de lado.
4. Tetraedro con una altura de 10 cm y cuya base tiene 6 cm de lado y 5.2 cm de alto.

Ahora reconsideremos la situación planteada en la introducción:

Durante una clase, la maestra Lupita entregó a cada uno de sus alumnos un trozo de cartulina y un par de pentágonos de 5 cm de lado y área igual a 43 cm^2. Enseguida les pidió que cortaran de la cartulina las 5 caras laterales que hacían falta, de manera que pudieran construir un prisma pentagonal que tuviera un volumen de 645 cm^3. ¿Cuál es la medida de la altura del prisma que construyeron los alumnos y cuánto mide su área total?

Si analizas la información que nos dan, notarás que se trata de un prisma pentagonal (como el de la figura de la derecha) del cual tenemos como datos el área de la base $A_{base} = 43 \text{ cm}^2$, la longitud del lado de cada uno de los rectángulos que conforman las caras laterales $l = 5 \text{ cm}$ y su volumen $V_{prisma} = 645 \text{ cm}^3$. Lo que nos piden calcular con estos datos es la altura h del prisma y su área total. Para determinar la altura, la despejamos de la fórmula $V_{prisma} = \text{Área de la base} \times \text{altura}$ y sustituimos los datos



$$V_{prisma} = \text{Área de la base} \times \text{altura} = A_{base} \times h$$
$$h = \frac{V_{prisma}}{A_{base}} = \frac{645 \text{ cm}^3}{43 \text{ cm}^2} = 15 \text{ cm}$$

Por otra parte, el área total se obtiene de la suma del área de las bases y el área de las caras laterales $A_t = A_b + A_l$ y en este caso ya tenemos el valor del área de una de las bases, que es 43 cm^2, pero como son dos las bases entonces el área de ambas bases es

$$A_b = 2 \times 43 \text{ cm}^2 = 86 \text{ cm}^2$$

Las caras laterales están formadas por 5 rectángulos de lado $l = 5 \text{ cm}$ y altura $h = 15 \text{ cm}$, por lo que el área de las caras laterales queda

$$A_l = l \times h + l \times h + l \times h + l \times h + l \times h = 5(l \times h) = 5(5 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}) = 5\left(75 \text{ cm}^2\right) = 375 \text{ cm}^2$$

Por lo que el área total se obtiene de la suma del área de las bases y el área de las caras laterales

$$A_t = A_b + A_l = 86 \text{ cm}^2 + 375 \text{ cm}^2 = 461 \text{ cm}^2$$

Cierre:

En este tema hemos hecho un repaso breve sobre cuerpos geométricos, presentado algunos conceptos importantes y describiendo las características de dos de los grupos de cuerpos geométricos más importantes, **los prismas y las pirámides**. Notaste las diferencias existentes entre los prismas y las pirámides y aprendiste a calcular tanto su área total, como su volumen a partir del conocimiento de algunos de sus elementos.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t03_s01_descartes/TS_1_index.html

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t04_s01_descartes/TS_2_index.html

http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/2_segundo/2_Matematicas/2m_b02_t05_s01_descartes/index.html

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Un artesano desea elaborar velas con forma de pirámide hexagonal que tengan una base de 210 cm^2. ¿Cuántos centímetros de altura debe tener el molde para hacer las velas, si el artesano debe gastar sólo 3150 cm^3 de parafina por cada vela?

A) 10.5

B) 15.0

C) 21.0

D) 31.5

2. Laura va a envolver un regalo con una caja que tiene forma de ortoedro de 25 cm de altura y cuyas bases son cuadrados de 15 cm de lado. ¿Cuántos cm^2 de papel necesita Laura para envolver su regalo?

A) 850

B) 1950

C) 2750

D) 5625

3. Miguel compró un jugo en un empaque en forma de tetraedro y observó que su contenido era igual a 325 ml (ó 325 cm^3). Con una regla Miguel midió las aristas del tetraedro, pero no pudo medir su altura interior. Si con sus medidas Miguel calculó que la base tiene 80 cm^2 de área, ¿cuál es la altura interior del tetraedro en centímetros?

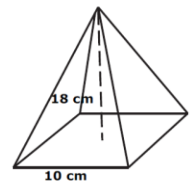
A) 4.1

B) 8.0

C) 12.2

D) 13.0

4. Francisco hizo una maqueta de una pirámide con los siguientes datos:



¿De cuantos cm^3 es el volumen de la maqueta de francisco?

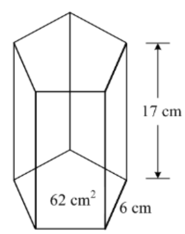
A) 240

B) 600

C) 720

D) 1800

5. De tarea Julia debe elaborar con cartulina un prisma como el que se muestra:



¿Cuántos cm^2 de cartulina necesitará Julia como mínimo para hacer su tarea?

A) 226

B) 510

C) 572

D) 634

TEMA 3. SUCESIONES DE NÚMEROS ENTEROS

Bloque III

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

Tema: Significado y uso de las literales

Subtema: Patrones y fórmulas

Resultado general de aprendizaje: Construye sucesiones de números con signo a partir de una regla dada y vice versa.

Resultado específico de aprendizaje:

Determina la regla algebraica que genera una determinada sucesión de números con signo positivo y/o negativos.

Introducción:

En una carrera tipo maratón que va de la ciudad de Guanajuato a la ciudad de León los organizadores tienen la indicación de colocar puestos para repartir agua a los competidores en los siguientes números de kilómetros: 3, 10, 17, 24, 31, 38,… ¿Cuál es la expresión algebraica que deben seguir los organizadores para colocar puestos de agua para todo el recorrido del maratón?

En el problema anterior sabemos los números de kilómetros en los que se colocarán puestos para repartir agua y nos piden encontrar una regla para determinar de manera rápida, por ejemplo, en cuál kilómetro se ubicará el puesto número 13. A continuación te mostraremos el procedimiento para desarrollar **expresiones algebraicas** que nos dan la regla para definir los valores de una determinada **sucesión de números enteros**.

Desarrollo:

Para entender ciertas **sucesiones de números enteros**, es importante obtener una **regla algebraica**, la cual irá generando los números que forman la sucesión. A continuación te presentamos algunos ejemplos de cómo construir sucesiones de números con signo a partir de una regla dada, así también obtener la regla que genera una sucesión de números con signo.

Para ello, es importante recordar la definición de **sucesión**, identificar el patrón que sigue la sucesión para generar los términos, los cuáles pueden ser números enteros positivos y negativos.

Sucesiones de números enteros

Se llama sucesión de números a un conjunto de números colocados uno a continuación de otro, a los cuales se les denomina términos de la sucesión. Por ejemplo:

$3, 6, 9, 12, \ldots$ *es una sucesión de números naturales*

$-4, -1, 2, \ldots$ *es una sucesión de números enteros.*

Recuerda

La posición de los términos de una sucesión va desde $1, 2, 3, 4, 5$ hasta n, dónde n pertenece al **conjunto de números naturales**. Por ejemplo, en la sucesión $3, 6, 9, 12, \ldots$ al 3 le corresponde $n = 1$, al 6 le corresponde $n = 2$, al 9 le corresponde $n = 3$ ya que el valor de n nos indica el lugar que corresponde al término de la sucesión.

El **término general** o **regla algebraica** en una sucesión, es una expresión matemáticas que nos permite determinar el valor de cualquier término de la sucesión a partir de su posición. En el caso de la sucesión $3, 6, 9, 13, \ldots$ la regla algebraica es $3n$ porque observamos que los valores corresponden a $3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \ldots, 3 \times n$.

Una técnica para obtener la regla algebraica es

1. Multiplicar la posición de un elemento que seleccionemos de la sucesión por la diferencia que hay entre dos términos consecutivos de la sucesión.

2. El resultado de esta multiplicación lo restamos al valor del elemento seleccionado de la sucesión.

3. Formar un binomio en el que el primer elemento sea el producto de la diferencia entre términos consecutivos y n; y el segundo elemento sea el resultado que obtenemos en el paso anterior.

Recuerda

En álgebra, un binomio consta únicamente de dos términos, separados por un signo de más $(+)$ *o de menos* $(-)$. *En otras palabras, es una expresión algebraica formada por la suma de dos monomios.*

Vamos a mostrar lo anterior desarrollando algunos ejemplos.

1.- Considera la sucesión:

$$-4, -1,\ 2,\ 5,\ 8, \ldots$$

Observa que la diferencia entre dos términos consecutivos es 3. Por lo que, si seleccionamos, por ejemplo, la segunda posición ($n=2$), tenemos que

1. El producto de la posición seleccionada por la diferencia entre dos términos consecutivos es $2\times3=6$.

2. El resultado de restar el valor determinado en el paso anterior al valor del elemento seleccionado de la sucesión (-1) es $-1-6=-7$.

3. El binomio que formamos con los valores determinados en los pasos anteriores es $3n-7$. Que corresponde a la expresión algebraica que genera todos los elementos de la sucesión a partir de su posición.

Para corroborar lo anterior observa la siguiente tabla

Posición de los términos de la sucesión (valores de n).	**Diferencia entre el valor correspondiente a la posición n y su consecutivo**	**Producto de n y la diferencia entre términos consecutivos**	**Diferencia entre el producto de la columna anterior y el valor correspondiente a la posición n**
$n=1$	$-1-(-4)=3$	$1\times3=3$	$-4-3=-7$
$n=2$	$2-(-1)=3$	$2\times3=6$	$-1-6=-7$
$n=3$	$5-2=3$	$3\times3=9$	$2-9=-7$
$n=4$	$8-5=3$	$4\times3=12$	$5-15=-7$

Notarás que con cualquiera de los renglones de la tabla podemos formar el binomio $3n-7$, utilizando el producto de n por el resultado de la segunda columna y sumando el resultado de la cuarta columna.

La **diferencia** entre dos términos consecutivos de una sucesión se calcula al restar a un término el término inmediato anterior. En las sucesiones en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es **constante**, cada término se obtiene sumando o restando una misma cantidad al término anterior. Es importante indicar qué número es el primer término de la sucesión, de lo contrario se pueden obtener muchas sucesiones utilizando la misma regla.

La principal ventaja de obtener la regla algebraica de una sucesión es que con ella podemos calcular cualquier término de la sucesión por más grande que sea su posición. Por ejemplo ¿cuál es el valor en la sucesión del término correspondiente a la posición 114?

Para determinar este valor debemos sustituir la posición en nuestro binomio, por lo que

$$3n-7=3(114)-7=335$$

Otra pregunta interesante que podemos analizar es ¿qué posición ocupa cierto número en la sucesión? Sabemos, por ejemplo, que el número 8 ocupa posición 5 en la sucesión, pero para un número muy grande como 434, ¿cómo determinamos la posición?

Lo que se debe hacer es, al número dado restarle el segundo elemento del binomio que conforma la expresión algebraica de la sucesión y dividir el resultado el entre el coeficiente (número) del primer término del binomio.

En este caso tenemos el binomio $3n-7$, por lo que, si queremos saber la posición del número 434, la operación que debemos hacer es

$$n=\frac{434-(-7)}{3}=\frac{441}{3}=147$$

por tanto, la posición que ocupa el término 434 en la sucesión es 147.

Nota que un número dado formará parte de una sucesión si y sólo si el resultado de buscar su posición en la sucesión es un **número natural** (entero positivo). De lo contrario, el número no formará parte de la sucesión.

*Un **número natural** es cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos.*

Recuerda

En el ejemplo anterior te hemos presentado una sucesión en la que los términos están creciendo, el siguiente ejemplo es una sucesión en la que sucede lo contrario, es decir, los términos están decreciendo.

2.- Considera la sucesión:

$$15, 6, -3, -12, \ldots$$

La diferencia entre dos términos consecutivos es -9. Por lo que, si seleccionamos, por ejemplo, la tercera posición ($n=3$), tenemos que

1. El producto de la posición seleccionada por la diferencia entre dos términos consecutivos es $3\times(-9)=-27$.

2. El resultado de restar el valor determinado en el paso anterior al valor del elemento seleccionado de la sucesión (-3) es $-3-(-27)=-3+27=24$.

3. El binomio que formamos con los valores determinados en los pasos anteriores es $-9n+24$. Que corresponde a la expresión algebraica que genera todos los elementos de la sucesión a partir de su posición.

Ahora que hemos determinado la expresión algebraica $-9n+24$, correspondiente la sucesión podemos responde a preguntas como las siguientes:

¿Cuál es el valor en la sucesión del término correspondiente a la posición 57?

Para determinar este valor debemos sustituir la posición en nuestro binomio, por lo que

$$-9n+24=-9(57)+24=-489$$

¿Qué posición ocupa -768 en la sucesión?

Restando al número dado el segundo elemento del binomio $-9n+24$ y dividiendo el resultado el entre el coeficiente (número) del primer término del mismo binomio tenemos que

$$n=\frac{-768-24}{-9}=\frac{-769}{-9}=88$$

Ya hemos presentado un par de ejemplos en los que se determinaros las expresiones algebraicas que caracterizan una sucesión de números enteros. Ahora presentamos un ejemplo en el que, a partir de la expresión algebraica, determinamos los primeros elementos que forman la serie.

3.- Si tenemos la regla algebraica $-5n+7$, ¿Cuál es la sucesión que genera? ¿Es una sucesión que va creciendo o decreciendo?

En principio, podemos obtener importante información de la regla algebraica que se da, sabemos que el número n se debe multiplicar por la diferencia que hay entre dos términos de la sucesión, es decir se tiene una diferencia de -5, Para calcular los primeros tres términos de la sucesión en la regla algebraica $-5n+7$ se sustituyen $n=1$, $n=2$ y $n=3$ de manera que

$$-5(1)+7=-5+7=2 \qquad -5(2)+7=-10+7=-3 \qquad -5(3)+7=-15+7=-8$$

Si continuamos de la misma forma, veremos que la sucesión que se genera con la expresión algebraica $-5n+7$ es

$$2,-3,-8,-13,-18,-23,\ldots$$

y, como se ve, la sucesión contiene términos que van disminuyendo. ¿A que se debe esto?

Para las sucesiones en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante se tiene que:

a) Si la constante es positiva, entonces los términos van aumentando.
b) Si la constante es negativa, entonces los términos van disminuyendo.

Actividad Realiza lo que se indica a continuación.

1. Relaciona las sucesiones del lado izquierdo con su correspondiente regla algebraica del lado derecho, escribiendo en el paréntesis la letra correspondiente.

Sucesión	**Regla algebraica**
( ) $-11,-6,-1,4,14,19,24,\ldots$	a) $4n-15$
( ) $-13,-8,-3,2,7,12,17,\ldots$	b) $5n-18$
( ) $-7,-3,1,5,9,13,17,21,\ldots$	c) $4n-11$
( ) $-11,-7,-3,1,5,9,13,\ldots$	d) $-4n+10$
( ) $6,2,-2,-6,-10,-14,-18,\ldots$	e) $5n-16$

2. En la sucesión correspondiente al inciso e) de ejercicio anterior, ¿Cuál es el término de la sucesión en la posición 117?

3. En qué posición se encuentra el número 169 dentro de la sucesión que genera la regla algebraica $4n-11$.

Antes de finalizar retomemos el problema de la introducción para solucionarlo:

En una carrera tipo maratón que va de la ciudad de Guanajuato a la ciudad de León los organizadores tienen la indicación de colocar puestos para repartir agua a los competidores en los siguientes números de kilómetros: 3, 10, 17, 24, 31, 38,… ¿Cuál es la expresión algebraica que deben seguir los organizadores para colocar puestos de agua para todo el recorrido del maratón?

La sucesión que define el problema es

$$3,10,17,24,31,38,\ldots$$

La diferencia entre dos términos consecutivos es 7. Por lo que, si seleccionamos, por ejemplo, la primera posición ($n=1$), tenemos que

1. El producto de la posición seleccionada por la diferencia entre dos términos consecutivos es $1\times 7=7$.

2. El resultado de restar el valor determinado en el paso anterior al valor del elemento seleccionado de la sucesión (3) es $3-7=-4$.

3. El binomio que formamos con los valores determinados en los pasos anteriores es $7n-4$. Que corresponde a la expresión algebraica que genera todos los elementos de la sucesión a partir de su posición.

Cierre:

En esta sesión hemos desarrollado algunos ejemplos donde se presentaron técnicas para obtener la regla algebraica de una sucesión dada, analizar la sucesión y obtener información importante de ella. Se analizaron sucesiones donde los términos están aumentando y sucesiones donde los términos están disminuyendo. Y también obtuvimos los términos de la sucesión correspondiente, dada una regla algebraica

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://iap-ec.com/PreVirtual/files/matematicas/content/flash/sucesiones%20y%20progresiones/progresiones.swf
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t01_s01_descartes/TS_2_index.html

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. ¿Cuáles son los primeros 4 términos de una sucesión con regla algebraica $-12n+2$?

A) $-10,-22,-34,-46,\ldots$

B) $10,\ 22,\ 34,\ 46,\ldots$

C) $-12,\ 0,\ 12,\ 24,\ldots$

D) $12,\ 0,-12,-24,\ldots$

2. ¿Cuáles son los respectivos números que hacen falta en la sucesión $\_\_,-3,8,19,\_\_,41,52,\_\_,\ldots$?

A) $14,30,63$

B) $-14,30,63$

C) $11,33,60$

D) $-11,33,60$

3. Se tiene la sucesión $8,11,14,17,20,\ldots$, identifica la regla algebraica que genera a la sucesión.

A) $n+8$

B) $5n+5$

C) $3n+5$

D) $n+3$

4. Se tiene la sucesión $-14,-6,2,10,18,\ldots$, identifica la regla algebraica que genera a la sucesión.

A) $14n+8$

B) $8n+14$

C) $22n-8$

D) $8n-22$

5. Se tiene la sucesión $1,-8,-17,-26,\ldots$ identifica la regla algebraica que genera a la sucesión.

A) $-9n-1$

B) $-n-9$

C) $-9n+10$

D) $-10n+9$

TEMA 4. RECTAS EN EL PLANO CARTESIANO

Bloque III

Eje temático: Manejo de la información

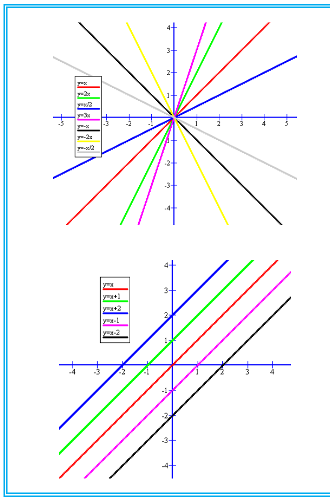
Tema: Representación de la información

Subtema: Gráficas

Resultado general de aprendizaje: Anticipa el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando se modifica el valor de b mientras el valor de m permanece constante.

Resultado específico de aprendizaje:

Identifica los efectos de los parámetros m y b de la función $y = mx + b$, en la gráfica que corresponde.



Introducción:

Tres autobuses A, B y C salen de la terminal de autobuses en momentos distintos, todos a una velocidad constante de 80 km/hr. Si el autobús B sale cuando el autobús A se ha desplazado 20 km y el autobús C sale cuando el autobús B se ha desplazado 30 km, realiza una gráfica que muestre el desplazamiento respecto del tiempo de cada autobús a partir de que sale de la terminal el autobús C.

En el planteamiento anterior existen implícitos algunos conceptos clave para realizar lo que se pide, que tienen que ver con la velocidad constante de los autobuses y el hecho de que cuando sale el autobús C los otros dos llevan ya algún kilometraje recorrido. A continuación te presentamos estos conceptos clave que tienen que ver con las **rectas en el plano cartesiano**.

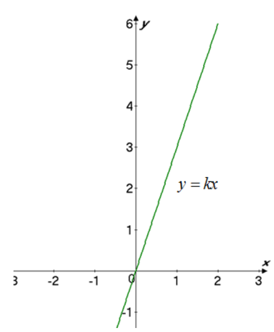
Desarrollo:

Para poder realizar lo que se pide en el problema de la introducción es necesario que repasemos un par de conceptos clave que tienen que ver con las rectas en el plano cartesiano, **la pendiente y la ordenada al origen.** Ambos conceptos son imprescindibles cuando queremos graficar y analizar el comportamiento de un grupo de rectas en el plano cartesiano.

Pendiente de una recta

La gráfica de la expresión $y = kx$ está formada por el grupo de puntos localizados sobre una línea recta que pasa por el origen, como la que te mostramos en la figura de la derecha.

Notarás que en la gráfica, los valores de y van aumentando conforme lo hacen los valores de x, por lo que decimos que x y y se encuentran en una relación de proporcionalidad directa. De esto concluimos que la expresión algebraica asociada a una relación de proporcionalidad directa es de la forma $y = kx$, donde k se conoce como la constante de proporcionalidad.

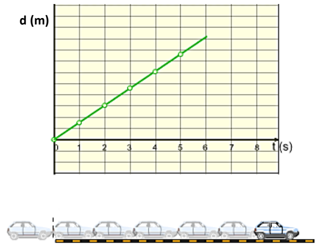


*Una relación de **proporcionalidad directa** entre dos magnitudes es aquella en la que, si los valores de una de las magnitudes se multiplican o dividen por un número, los de la otra quedan multiplicados o divididos por el mismo número. Por ejemplo:*

Recuerda

- *El número de objetos (o kilos, litros, etc.) que se compran y el precio a pagar.*
- *El tiempo transcurrido y la distancia recorrida a una velocidad constante.*

De acuerdo a lo anterior, podemos decir que en las situaciones de proporcionalidad directa, lo que se mantiene constante es la **razón** entre pares de valores correspondientes a las variables involucradas. Por ejemplo si un automóvil viaja a velocidad v constante, la distancia recorrida d y el tiempo transcurrido t se encuentran en una relación de proporcionalidad directa. Lo anterior quiere decir que a mayor tiempo transcurrido, mayor será la distancia recorrida (observa la figura de la derecha), lo cual se expresa de la siguiente manera



$$v = \frac{d}{t}$$

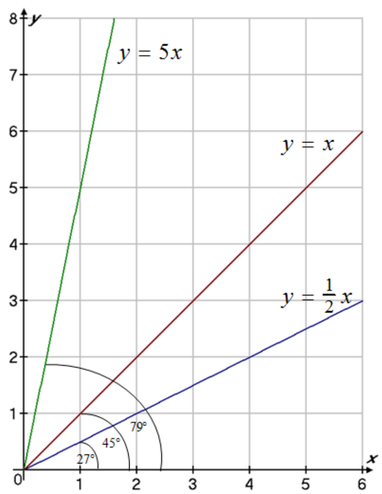
De donde verificamos que la razón d/t es la cantidad que permanece constante. Podemos rescribir la fórmula de la velocidad como $d = vt$, de esta manera queda en la forma de la expresión algebraica asociada a una relación de proporcionalidad directa, $y = kx$. En este caso observa que la velocidad v es la **constante de proporcionalidad.**

En las expresiones algebraicas asociadas a una relación de proporcionalidad directa del tipo $y = kx$, la constante de proporcionalidad k representa la **pendiente** de la recta que obtenemos al realizar su gráfica, de manera que entre mayor es el valor de k, mayor es el **ángulo de inclinación** de la recta.

Recuerda

*Cualquier recta que no esté en posición horizontal o vertical está inclinada. La **inclinación** se da como una medida del **ángulo** que forma la recta con la horizontal. Se llama **ángulo de inclinación** al ángulo formado por la recta y el extremo positivo de eje x, a partir de éste girando en sentido contrario a las manecillas del reloj.*

En la derecha se muestran las gráficas de tres rectas del tipo $y = kx$. Observa que, a medida que aumenta el valor de k, el ángulo de inclinación aumenta. Así, cuando $k = \frac{1}{2}$ el ángulo de inclinación es de 27°, cuando $k = 1$ el ángulo de inclinación es de 45° y cuando $k = 5$ el ángulo de inclinación es de 79°.



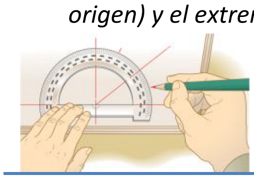
En general podemos decir que:

- Para todos los valores de k que sean mayores que 0 pero menores que 1, el ángulo de inclinación tiene valores mayores que 0° pero menores que 45°.
- Para todos los valores de k que sean mayores 1, el ángulo de inclinación tiene valores mayores que 45° pero menores que 90°.

Recuerda

Para medir el ángulo de inclinación de una línea recta con pendiente positiva se hace los siguiente:

1. *Se coloca el centro del trasportador en el punto en el que la recta corta el eje x (en este caso es el origen) y el extremo derecho del transportador sobre el eje x positivo.*

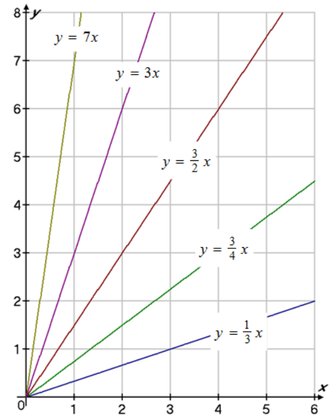


2. *Contamos los grados en el transportador desde la parte derecha del eje x hasta el grado en el que el transportador es cruzado por la línea.*
3. *El número de grados que contamos hasta que la recta cruza el transportador es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje x.*

Actividad

Con un trasportador mide cada uno de los ángulos de inclinación de las rectas mostradas en la figura de la derecha y completa la siguiente tabla.

Expresión algebraica	Ángulo de inclinación
$y = \frac{1}{3}x$	
$y = \frac{3}{4}x$	
$y = \frac{2}{4}x$	
$y = 3x$	
$y = 7x$	



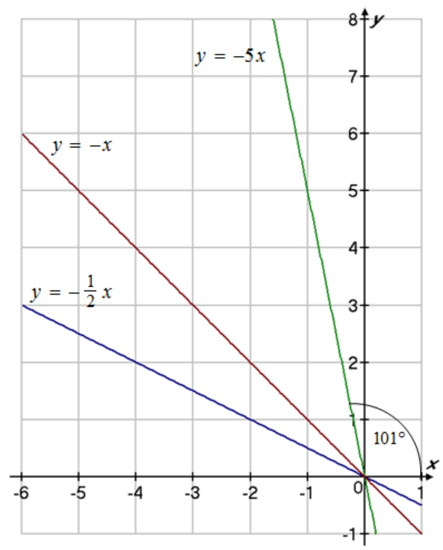
Pendiente negativa de una recta

Hasta ahora hemos revisado expresiones algebraicas del tipo $y = kx$ en las que la pendiente k ha sido siempre positiva, es decir, sus ángulos de inclinación son mayores que 0° pero menores que 90°. Pero ¿qué sucede cuando el ángulo de inclinación de una recta es mayor a los 90°?

Cuándo el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el origen es **mayor a los 90° y menor a los 180°**, la **pendiente** k de su expresión algebraica tiene **signo negativo**.

$$y = -kx$$

En la derecha se muestran las gráficas de tres rectas del tipo $y = -kx$. Observa que solamente la recta $y = -5x$ tiene el valor de su ángulo de inclinación, 101°. Con un transportador mide el ángulo de las otras dos rectas. Si realizas correctamente las mediciones notarás que en estos casos, a medida que se hace menor (más negativo) el valor de k, el ángulo de inclinación disminuye. Así, cuando $k = -\frac{1}{2}$ el ángulo de inclinación es de 153°, cuando $k = -1$, el ángulo de inclinación es de 135° y cuando $k = -5$, el ángulo de inclinación es de 101°.



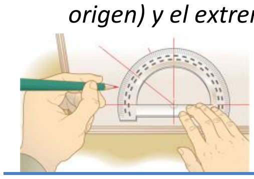
En general podemos decir que:

- Para todos los valores de k que sean menores que 0 pero mayores que -1, el ángulo de inclinación tiene valores mayores que 135° pero menores que 180°.
- Para todos los valores de k que sean menores a -1, el ángulo de inclinación tiene valores mayores que 90° pero menores que 135°.

Para medir el ángulo de inclinación de una línea recta con pendiente negativa se hace los siguiente:

Recuerda

1. *Se coloca el centro del trasportador en el punto en el que la recta corta el eje x (en este caso es el origen) y el extremo izquierdo del transportador sobre el eje x negativo.*

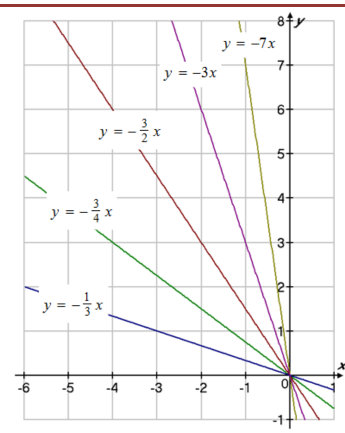


2. *Contamos los grados en el transportador desde la parte izquierda del eje x hasta el grado en el que el transportador es cruzado por la línea.*
3. *El número de grados que contamos hasta que la recta cruza el transportador los restamos a 180° y el resultado es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje x.*

Actividad

Con un trasportador mide cada uno de los ángulos de inclinación de las rectas mostradas en la figura de la derecha y completa la siguiente tabla.

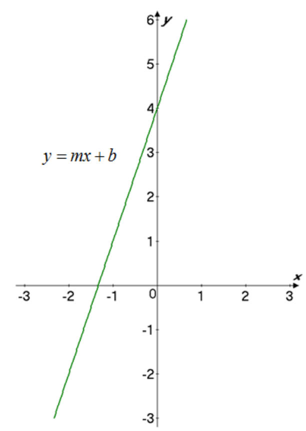
Expresión algebraica	Ángulo de inclinación
$y=-\frac{1}{3}x$	
$y=-\frac{3}{4}x$	
$y=-\frac{2}{4}x$	
$y=-3x$	
$y=-7x$	



Hasta aquí habrás notado que todas las rectas de la forma $y=kx$ (que pasan por el origen y tienen pendiente positiva) tienen ángulos de inclinación respecto del eje x mayores de 0° y menores de 90°, mientras que las rectas de la forma $y=-kx$ (que pasan por el origen y tienen pendiente negativa) tienen ángulos de inclinación respecto del eje x mayores de 90°, pero menores de 180°.

La ordenada al origen de una recta

La gráfica de la expresión $y=mx+b$ también está formada por el grupo de puntos localizados sobre una línea recta, pero a diferencia de las gráficas de expresiones del tipo $y=kx$ ó $y=-kx$, ésta no pasa por el origen, como la que te mostramos en la figura de la derecha.



Notarás que en la gráfica la recta no corta a los ejes en el origen, sino que lo hace, para cada uno de los ejes x y y, a una cierta distancia desde el origen.

A la distancia desde el origen en el que una recta corta al eje y se le llama **ordenada al origen** y corresponde a la letra b de la expresión algebraica $y=mx+b$ de la recta.

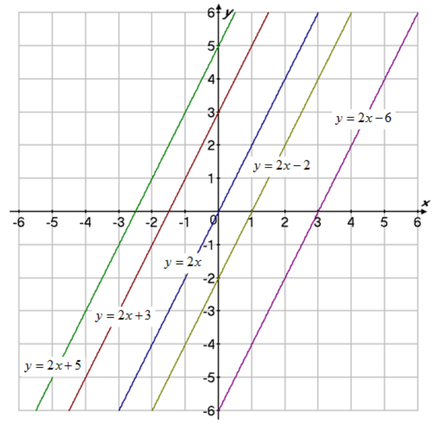
Cuando hablamos de rectas en el plano con **ordenada al origen** b, dejamos de denotar a la pendiente de la recta con la letra k y la sustituimos por la letra m, de manera que en la expresión algebraica $y=mx+b$, m es la **pendiente de la recta**.

Observa en la gráfica que la recta corta al eje y en 4, por lo que la ordenada al origen es $b=4$, de hecho, la expresión algebraica específica de esa recta es $y=\frac{8}{3}x+4$, entonces, de acuerdo con lo anterior, la pendiente de esa recta es $m=\frac{8}{3}$ y, por ser esta positiva, su ángulo de inclinación está entre los 0° y los 90°.

Recuerda

El ángulo de inclinación de una recta del tipo $y=mx+b$ se mide de la misma forma que lo hacemos con las rectas del tipo $y=kx$, con la salvedad de que para estas rectas colocamos el trasportador en el punto en el que la recta corta al eje x y no en el origen.

En la derecha se muestran las gráficas de cinco rectas del tipo $y = mx + b$. En todas ellas se mantiene constante la pendiente $m = 2$ y los valores de la ordenada al origen b son diferentes.



Nota que la recta en color azul tiene una ordenada al origen $b = 0$ y es la única que pasa por el origen, mientras que las demás cortan al eje y a una distancia positiva o negativa respecto del origen.

Observa también que estas rectas, al tener la misma pendiente m, nunca se cortan, es decir, son rectas paralelas.

¿Qué efecto tiene entonces la ordenada al origen b en una familia de rectas con la misma pendiente m?

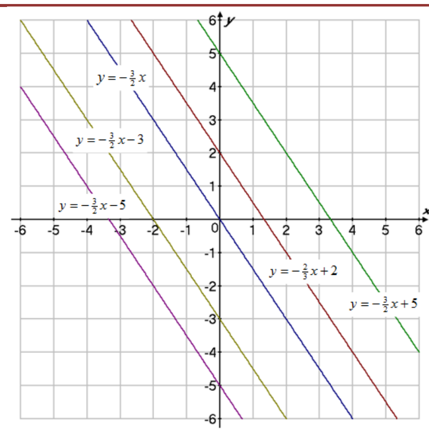
En general podemos decir que:

En una familia de rectas $y = mx + b$ con la misma pendiente m, la ordenada al origen b indica el número de unidades (hacia arriba o hacia abajo) que sobre el eje y se desplaza la recta $y = mx$.

Actividad

Observa la familia de rectas mostrada en la figura de la derecha y completa la siguiente tabla.

Expresión algebraica	Pendiente	Ordenada al origen
$y = -\frac{3}{2}x + 5$		
$y = -\frac{3}{2}x + 2$		
$y = -\frac{3}{2}x$		
$y = -\frac{3}{2}x - 3$		
$y = -\frac{3}{2}x - 5$		



Ahora ya estamos en condiciones de responder al planteamiento hecho en la introducción:

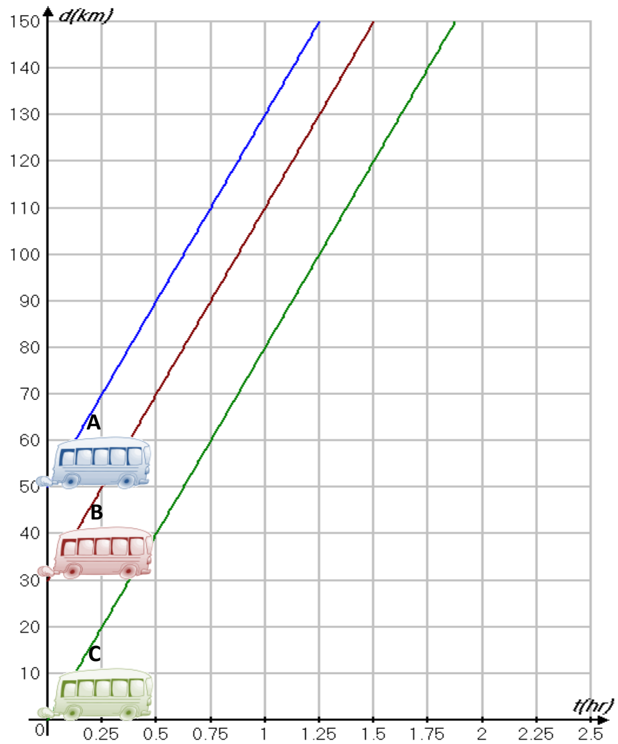
Tres autobuses A, B y C salen de la terminal de autobuses en momentos distintos, todos a una velocidad constante de 80 km/hr. Si el autobús B sale cuando el autobús A se ha desplazado 20 km y el autobús C sale cuando el autobús B se ha desplazado 30 km, realiza una gráfica que muestre el desplazamiento respecto del tiempo de cada autobús a partir de que sale de la terminal el autobús C.

Lo primero que hay que observar es que los tres autobuses van a una velocidad constante de 80 km/hr, por lo que en una gráfica el desplazamiento respecto del tiempo de los autobuses se verá como una línea recta con una **pendiente** igual a 80.

Como nos piden que la gráfica comience a partir de que el autobús C sale de la terminal, su recta debe comenzar en el origen, por lo que su expresión algebraica es del tipo $y = mx$, donde y será el desplazamiento d en kilómetros, m será la velocidad constante $v = 80 \text{ km/hr}$ y x será el tiempo t en horas, de manera que su expresión algebraica queda como $d = 80t$.

Al momento que sale el autobús C de la terminal, los autobuses B y A llevan desplazamientos de 30 km y 50 km, respectivamente y, como hemos designado al eje vertical para los valores de los desplazamientos, estos valores representan las **ordenadas al origen** de las rectas correspondientes a los autobuses B y A, en una familia de rectas del tipo $d = 80t + b$.

Las expresiones algebraicas para los autobuses B y A son $d = 80t + 30$ y $d = 80t + 50$ respectivamente, por lo que una posible gráfica que muestre el desplazamiento respecto del tiempo de cada autobús a partir de que sale de la terminal el autobús C quedaría como la siguiente.



Cierre:

En este tema hemos hecho un repaso breve sobre un par de conceptos clave que tienen que ver con las rectas en el plano cartesiano, **la pendiente y la ordenada al origen.** Pudiste notar que ambos conceptos sin imprescindibles cuando queremos graficar y analizar el comportamiento de un grupo de rectas en el plano cartesiano.

Ten siempre presente que:

- Cuándo el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el origen es mayor a los 0° y menor a los 90°, la pendiente k de su expresión algebraica tiene signo positivo, $y = kx$.
- Cuándo el ángulo de inclinación de una recta que pasa por el origen es mayor a los 90° y menor a los 180°, la pendiente k de su expresión algebraica tiene signo negativo, $y = -kx$.
- En una familia de rectas $y = mx + b$ con la misma pendiente m , la ordenada al origen b indica el número de unidades (hacia arriba o hacia abajo) que sobre el eje y se desplaza la recta $y = mx$.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t07_s01_descartes/TS_1_index.html

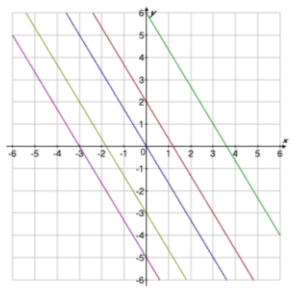
http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b03_t03_s01_descartes/TS_4_index.html

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Observa la siguiente gráfica



¿Cuál de las siguientes opciones describe de manera correcta a esta familia de rectas?

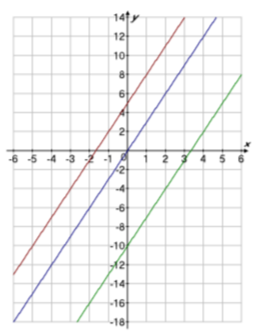
A) Rectas con pendiente constante positiva

B) Rectas con pendiente constante negativa

C) Rectas con ordenada al origen constante positiva

D) Rectas con ordenada al origen constante negativa

2. Observa la siguiente gráfica que hizo Roberto para su tarea:



¿Cuál de las siguientes opciones identifica de manera correcta a la familia de rectas que graficó Roberto?

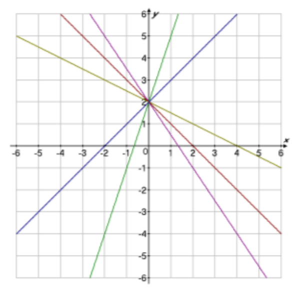
A) $y = 3x + 5$, $y = 3x$, $y = 3x - 10$

B) $y = -3x + 5$, $y = -3x$, $y = -3x - 10$

C) $y = 5x + 3$, $y = x + 3$, $y = 10x + 3$

D) $y = 3x + 5$, $y = x + 5$, $y = 10x + 5$

4. Observa la siguiente gráfica



¿Cuál de las siguientes opciones describe de manera correcta a esta familia de rectas?

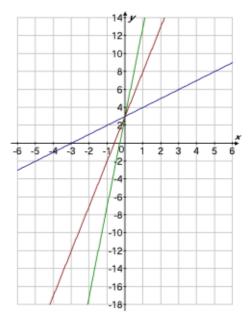
A) Rectas con pendiente constante positiva

B) Rectas con pendiente constante negativa

C) Rectas con ordenada al origen constante positiva

D) Rectas con ordenada al origen constante negativa

4. Observa la siguiente gráfica que la maestra Mónica desarrollo en clase de matemáticas:



¿Cuál de las siguientes opciones identifica de manera correcta a la familia de rectas que graficó la maestra?

A) $y = 3x + 5$, $y = 3x$, $y = 3x - 10$

B) $y = -3x + 5$, $y = -3x$, $y = -3x - 10$

C) $y = 5x + 3$, $y = x + 3$, $y = 10x + 3$

D) $y = 3x + 5$, $y = x + 5$, $y = 10x + 5$

TEMA 5. POTENCIAS NEGATIVAS

Bloque IV

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

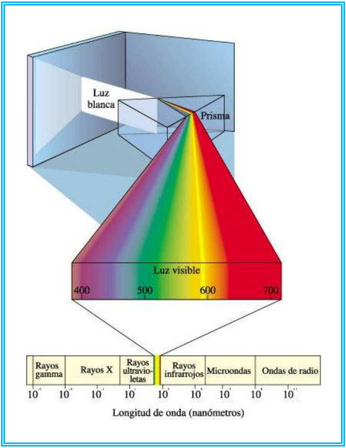
Tema: Significado y uso de las operaciones

Subtema: Potenciación y radicación

Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas que implican el uso de las leyes de los exponentes y de la notación científica.

Resultado específico de aprendizaje:

Determina la expresión equivalente simplificada que resulta de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo.



Introducción:

A la región del espectro electromagnético que el ojo humano es capaz de percibir se le llama luz visible. En el extremo inferior de la región de luz visible comienza la región de **rayos ultravioleta** con una longitud de onda cercana a los $\mathbf{10^{-7}}$ metros, mientras que en el extremo superior de la región de luz visible se encuentran los **rayos infrarrojos** con una longitud de onda cercana a los $\mathbf{10^{-6}}$ metros. De acuerdo a la información anterior, ¿cuántas veces es mayor la longitud de onda de los rayos infrarojos respecto de los rayos ultravioleta?

Si analizas el planteamiento notarás que aparecen dos cantidades en forma de **potencia con exponente negativo** y nos solicitan encontrar una relación entre las longitudes de onda de los rayos infrarrojos y los rayos ultravioleta. A continuación te presentamos algunos conceptos y procedimientos aritméticos relacionados con las potencias, en especial cuando éstas se presentan con exponente negativo.

Desarrollo:

Para poder realizar lo que se pide en el problema de la introducción es necesario que repasemos algunos conceptos y procedimientos relacionados con la operación aritmética de potenciación.

Recordaremos lo que es la **operación de potenciación** y describiremos las principales **propiedades de las operaciones con potencias.** Finalmente definiremos lo que es la **potencia con exponente negativo** y cómo es que debemos aplicar las propiedades vistas cuando involucramos este tipo de cantidades.

Recuerda

*La operación que consiste en multiplicar un factor natural reiteradamente se denomina **potencia de números naturales** y ésta es un caso particular de la multiplicación de números naturales. Cada multiplicación de factores reiterados puede escribirse en notación de potencia, así por ejemplo*

$$4\times4\times4 \quad \textit{se escribe } 4^3$$
$$6\times6\times6\times6 \quad \textit{se escribe } 6^4$$
$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 \quad \textit{se escribe } 2^7\,.$$

Los elementos que aparecen en la notación de potencias se identifican como:

$$5^{3 \leftarrow \text{exponente}}_{\leftarrow \text{base}}$$

El conocimiento de algunas **propiedades de las operaciones con potencias** y su aplicación de éstas nos permite manejar esas operaciones con mayor soltura. Veamos algunas.

Producto de potencias de igual base

Al multiplicar por ejemplo $2^5 \times 2^3$ se obtiene $(2\times2\times2\times2\times2)\times(2\times2\times2) = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^8$. Análogamente, se comprueba que $5^2 \times 5^4 = 5^6$. Y así con cualquier otro ejemplo.

En general podemos decir que:

El **producto de dos potencias de igual base** es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la **suma de los exponentes** de las potencias que se multiplican.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Donde a, m y n son números naturales.

Así, por ejemplo

$$13^3 \times 13^2 = 12^{3+2} = 13^5 \quad ; \quad 13^4 \times 13 = 13^{4+1} = 13^5 \quad ; \quad 13 \times 13 = 13^{1+1} = 13^2$$

Pero también

$$13^6 = 13 \times 13^5 = 13^2 \times 13^4 = 13^3 \times 13^3.$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos ya que en ocasiones es útil descomponer una potencia en un producto de potencias cuyos exponentes sumen el exponente de la potencia original.

Es importante mencionar que esta propiedad es también aplicable cuando tenemos el producto de más de dos potencias de la misma base, por ejemplo, $13^2 \times 13^5 \times 13^3$ se puede calcular de las siguientes tres maneras:

$$13^2 \times 13^5 \times 13^3 = \left(13^2 \times 13^5\right) \times 13^3 = \left(13^{2+5}\right) \times 13^3 = 13^7 \times 13^3 = 13^{7+3} = 13^{10}$$

ó

$$13^2 \times 13^5 \times 13^3 = 13^2 \times \left(13^5 \times 13^3\right) = 13^2 \times \left(13^{5+3}\right) = 13^2 \times 13^8 = 13^{2+8} = 13^{10}$$

ó

$$13^2 \times 13^5 \times 13^3 = 13^{2+5+3} = 13^{10}$$

Actividad

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

		$a)$	$5^5 \times 5^5$
( )	$5^7 =$	$b)$	$5^2 \times 5^5$
( )	$5^2 \times 5^3 \times 5 =$	$c)$	$5^3 \times 5^3 \times 5^3$
( )	$5^9 =$	$d)$	5^8
( )	$5^4 \times 5^6 =$	$e)$	5^6
( )	$5 \times 5^2 \times 5 =$	$f)$	5^4
		$g)$	5^{11}

Cociente de potencias de igual base

Al dividir por ejemplo, $\frac{2^5}{2^3}$ se obtiene $\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2\times2 = 2^2$. Análogamente, se comprueba que $\frac{7^6}{7^2} = 7^4$. Y así con cualquier otro ejemplo.

En general podemos decir que:

El **cociente de dos potencias de igual base** es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es la **diferencia de los exponentes** de las potencias que se dividen.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Donde a, m y m son números naturales, con $a \neq 0$ y $n > m$.

Así, por ejemplo

$$\frac{13^5}{13^2} = 13^{5-3} = 13^2 \qquad ; \qquad \frac{13^4}{13} = 13^{4-1} = 13^3$$

Pero también

$$13^2 = \frac{13^7}{13^5} = \frac{13^4}{13^2} = \frac{13^3}{13}.$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos ya que en ocasiones es útil descomponer una potencia en un cociente de potencias cuya resta de sus exponentes de cómo resultado el exponente de la potencia original.

Observa que, si se toma un ejemplo similar a los anteriores, $\frac{5^3}{5^2}$ representa la división $\frac{125}{25}$, cuyo cociente es 5. Pero si se maneja la misma división en términos de potencias, ya hemos visto que $\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1$. De donde, por igualdad de resultados, tenemos que $5^1 = 5$ y en general podemos decir que:

Cualquier número elevado a la **primera potencia** reproduce el mismo número.

$$a^1 = a$$

Ahora, ¿qué pasa si $n = m$? Tal sería el caso de, por ejemplo, $\frac{3^4}{3^4}$. De hecho, estamos dividiendo $\frac{81}{81}$, cuyo cociente es 1. Pero si aplicamos el criterio anterior, $\frac{3^4}{3^4} = 3^{4-4} = 3^0$. Como ambos resultados deben coincidir, tenemos que $3^0 = 1$ y en general podemos decir que:

Cualquier número elevado a la **potencia cero** reproduce la unidad.

$$a^0 = 1$$

Estos dos últimos resultados, $a^1 = a$ y $a^0 = 1$ nos dan elementos para decir que no siempre se cumple que la potencia de un número natural es mayor que dicho número.

Actividad

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

		$a)$	$\frac{4^{10}}{4}$
( )	$\frac{4^6}{4^4} =$	$b)$	4^7
( )	$\frac{4^5}{4^4} =$	$c)$	1
( )	$4^4 =$	$d)$	4^2
( )	$\frac{4^3}{4^3} =$	$e)$	$\frac{4^6}{4^2}$
( )	$\frac{4^{12}}{4^3} =$	$f)$	0
		$g)$	4

Potencia de una potencia

Podemos tener el caso de una potencia cuya base sea, a su vez, una potencia. Por ejemplo, $\left(3^5\right)^2$. Esta operación es equivalente a $3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$. También podemos verificar que $\left(2^3\right)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{3\times4} = 2^{12}$. Y así con cualquier otro ejemplo.

En general podemos decir que:

La **potencia de una potencia** es otra potencia que tiene la misma base y cuyo exponente es el **producto de los dos exponentes**.

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$$

Donde a, m y n son números naturales.

Así, por ejemplo

$$\left(5^2\right)^4 = 5^{2\times4} = 5^8 \quad ; \quad \left(6^3\right)^0 = 6^{3\times0} = 6^0 = 1$$

$$\left(11^3\right)^2 = 11^{3\times2} = 11^6 \quad ; \quad 32^2 = \left(2^5\right)^2 = 2^{5\times2} = 2^{10}$$

Pero también

$$7^4 = \left(7^2\right)^2$$
$$3^6 = \left(3^2\right)^3 = \left(3^3\right)^2$$
$$2^8 = \left(2^2\right)^4 = \left(2^4\right)^2$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos ya que en ocasiones es útil descomponer una potencia en una potencia de otra potencia cuyo producto de sus exponentes de cómo resultado el exponente de la potencia original.

Actividad

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

		$a)$	3^9
( )	$3^{12} =$	$b)$	3^{10}
( )	$\left(3^2\right)^4 =$	$c)$	1
( )	$\left(3^0\right)^9 =$	$d)$	81^3
( )	$\left(3^5\right)^2 =$	$e)$	3^8
( )	$\left(3^3\right)^6 =$	$f)$	3^{18}
		$g)$	0

Potencia de una multiplicación de potencias

También podemos tener el caso de una potencia cuya base sea una multiplicación de potencias (no necesariamente de la misma base). Por ejemplo la operación $\left(2^3 \times 5^2\right)^4$ es equivalente a

$$\left(2^3 \times 5^2\right) \times \left(2^3 \times 5^2\right) \times \left(2^3 \times 5^2\right) \times \left(2^3 \times 5^2\right).$$

Ahora, si aplicamos las leyes conmutativa y asociativa de la multiplicación tenemos que lo anterior es equivalente a

$$\left(2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3\right) \times \left(5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2\right) = \left(2^3\right)^4 \times \left(5^2\right)^4 = 2^{3\times4} \times 5^{2\times4} = 2^{12} \times 5^8 .$$

Y de un modo análogo en cualquier otro caso. Podemos entonces en general decir que

La **potencia de una multiplicación de potencias** es otra multiplicación de potencias, cada una de las cuales tiene la misma base inicial y como exponente, **el respectivo producto de exponentes**.

$$\left(a^n \times b^m\right)^p = a^{n\times p} \times b^{m\times p}$$

Donde a, b , m , n y p son números naturales.

Así, por ejemplo

$$\left(4^2 \times 5^3\right)^2 = 4^{2\times2} \times 5^{3\times2} = 4^2 \times 5^6 \quad ; \quad \left(3 \times 2^2 \times 5^6\right)^4 = 3^4 \times 2^8 \times 5^{24}$$

Pero también

$$2^6 \times 3^9 \times 5^{15} = \left(2^2 \times 3^3 \times 5^5\right)^3 \quad ; \quad 7^4 \times 3^8 \times 16 = 7^4 \times 3^8 \times 2^4 = \left(7 \times 3^2 \times 2\right)^4$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos. Observa que en estos dos últimos ejemplos lo que hicimos fue extraer el factor común del grupo de exponentes. Así, para los exponentes 6, 9 y 15 el factor común es 3 y para los exponentes 4, 8 y 4 el factor común es 4.

Actividad

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

		$a)$	0
( )	$\left(5^3 \times 7^2\right)^4 =$	$b)$	$\left(5^3 \times 7^2\right)^2$
( )	$6^{12} \times 4^{15} \times 7^9 =$	$c)$	$5^{12} \times 7^8$
( )	$\left(10^2 \times 9^5 \times 2^3\right)^0 =$	$d)$	$10^2 \times 9^5 \times 2^3$
( )	$5^6 \times 7^4 =$	$e)$	$\left(6^4 \times 4^5 \times 7^3\right)^3$
( )	$\left(6^4 \times 4^3 \times 7^2\right)^5 =$	$f)$	$6^2 \times 4^{15} \times 7^{10}$
		$g)$	1

Potencias con exponente negativo

Al final del apartado del cociente de potencias de igual base, cuya expresión generalizada es $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, vimos que si $n = m$, entonces sucedía que el resultado era $a^0 = 1$. Pero ¿qué sucede cuando $n < m$? Tal sería el caso de, por ejemplo, $\frac{3^4}{3^7}$. Si aplicamos la propiedad del cociente de dos potencias de igual base, $\frac{3^4}{3^7} = 3^{4-7} = 3^{-3}$. ¿Qué significado tienen una potencia cuyo exponente es un número negativo?

Para responder a esta pregunta consideremos una potencia con la misma base pero con signo positivo 3^3 y efectuemos el producto de esta con su correspondiente de signo negativo 3^{-3}.

$$3^3 \times 3^{-3} = 3^{3+(-3)} = 3^{3-3} = 3^0 = 1$$

Ahora efectuemos el producto de la potencia con exponente positivo 3^3 con su recíproco $\frac{1}{3^3}$.

$$3^3 \times \frac{1}{3^3} = \frac{3^3}{3^3} = 3^{3-3} = 3^0 = 1$$

Como ambos productos nos dan el mismo resultado, si aplicamos la propiedad transitiva de la igualdad tenemos que

$$3^3 \times 3^{-3} = 3^3 \times \frac{1}{3^3}$$

De donde finalmente vemos que

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

Y de un modo análogo en cualquier otro caso. Podemos entonces en general decir que

Una **potencia con exponente negativo** es igual a una fracción cuyo numerador es uno y cuyo denominador es una potencia de la misma base con exponente igual en valor numérico, pero con signo positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Donde [illegible] es un número natural y $n > 0$.

Así, por ejemplo

$$(7^2)^{-1} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$

$$4^{-2} \times 4^{-3} = 4^{-2-3} = 4^{-5} = \frac{1}{4^5}$$

$$(3^4 \times 3^2)^{-3} = (3^{4+2})^{-3} = (3^6)^{-3} = 3^{-18} = \frac{1}{3^{18}}$$

$$(2^{-2} \times 2^{-5})^{-1} = (2^{-7})^{-1} = \left(\frac{1}{2^7}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{-7}} = \frac{1}{\frac{1}{2^7}} = 2^7$$

$$(6^2 \times 9^2)^{-4} = 6^{(3)(-4)} \times 9^{(2)(-4)} = 6^{-12} \times 9^{-8} = \frac{1}{6^{12}} \times \frac{1}{9^8}$$

Pero también

$$\frac{1}{6^4} = 6^{-4}$$

$$\frac{1}{5^4} \times \frac{1}{3^6} = 5^{-4} \times 3^{-6}$$

$$\frac{1}{7^{-6}} \times \frac{1}{5^{-4}} = 7^{-(-6)} \times 5^{-(-4)} = 7^6 \times 5^4$$

Con esto queremos decir que debes saber manejar esta propiedad en ambos sentidos.

Actividad

Relaciona las columnas colocando en los paréntesis de la columna de la izquierda la letra correspondiente a su equivalente en la columna de la derecha.

		$a)$	6^{10}
( )	$(6^2)^{-3} =$	$b)$	$6^9 \times 3^{12}$
( )	$6^{-4} \times 6^{-3} =$	$c)$	$\frac{1}{6^6}$
( )	$(6^3 \times 6^5)^{-2} =$	$d)$	$\frac{1}{6^9} \times \frac{1}{3^{12}}$
( )	$(6^{-1} \times 6^{-4})^{-2} =$	$e)$	$\frac{1}{6^{10}}$
( )	$(6^3 \times 3^4)^{-3} =$	$f)$	$\frac{1}{6^7}$
		$g)$	$\frac{1}{6^{16}}$

Ahora ya estamos en condiciones de responder al planteamiento hecho en la introducción:

A la región del espectro electromagnético que el ojo humano es capaz de percibir se le llama luz visible. En el extremo inferior de la región de luz visible comienza la región de rayos ultravioleta con una longitud de onda cercana a los 10^{-7} metros, mientras que en el extremo superior de la región de luz visible se encuentran los rayos infrarrojos con una longitud de onda cercana a los 10^{-6} metros. De acuerdo a la información anterior, ¿cuántas veces es mayor la longitud de onda de los rayos infrarojos respecto de los rayos ultravioleta?

De acuerdo con el problema, las longitudes de onda de los rayos infrarrojos tienen un orden de magnitud de 10^{-6} metros, mientras que las longitudes de onda de los rayos ultravioleta tienen un orden de magnitud de 10^{-7} metros. Para determinar el número de veces que es mayor la longitud de onda de los rayos infrarrojos respecto de los rayos ultravioleta debemos encontrar la razón de sus órdenes de magnitud, de manera que

$$\frac{10^{-6}}{10^{-7}} = 10^{-6-(7)} = 10^{-6+7} = 10^{1} = 10 \quad \text{ó} \quad \frac{10^{-6}}{10^{-7}} = \frac{\frac{1}{10^{6}}}{\frac{1}{10^{7}}} = \frac{10^{7}}{10^{6}} = 10^{7-6} = 10^{1} = 10$$

Por lo que decimos que las longitudes de onda de los rayos infrarrojos son **10 veces mayores** a las longitudes de onda de los rayos ultravioleta.

Cierre:

En este tema hemos hecho un repaso breve sobre lo que es la operación de potenciación, las principales propiedades de las operaciones con potencias y las potencias con exponente negativo. Así mismo, mostramos la utilidad de las operaciones y propiedades de las potencia en la solución de situaciones cotidiana.

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las operaciones con potencias.

Propiedad	**Expresión generalizada**
Producto de dos potencias de igual base	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
Cociente de dos potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
Potencia de una potencia	$\left(a^n\right)^m = a^{n\times m}$
Potencia de una multiplicación de potencias	$\left(a^n \times b^m\right)^p = a^{n\times p} \times b^{m\times p}$
Número elevado a la primera potencia	$a^1 = a$
Número elevado a la potencia cero	$a^0 = 1$
Potencia con exponente negativo	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Como puedes apreciar, en principio se trata de formas equivalentes de escribir una misma expresión, pero indudablemente aportan también ciertas facilidades a la hora de efectuar algunos cálculos.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t01_s01_descartes/TS_1_index.html

http://odas.educarchile.cl/objetos_digitales/odas_matematicas/23_potencias_exponente_-2_-3/LearningObject/content/io_1.swf?version=0.18

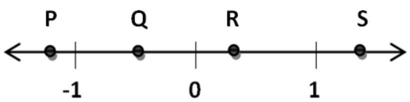
http://biblioteca.itson.mx/oa/dip_ago/leyes_exponentes/index.swf

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. ¿Cuál de los puntos mostrados sobre la siguiente recta numérica podría corresponder a n^{-1} si n es número natural (entero positivo)?



A) P

B) Q

C) R

D) S

2. ¿Cuál es la expresión que corresponde a la potencia de $(4)^{-2}$?

A) -16

B) $-\frac{1}{16}$

C) $\frac{1}{16}$

D) 16

3. ¿Cuál de las opciones corresponde a al resultado de simplificar la expresión $\left(2^3 \times 2^2\right)^{-1}$?

A) -32

B) $-\frac{1}{32}$

C) $\frac{1}{32}$

D) 32

4. ¿Cuál de las opciones corresponde a una expresión equivalente de $\left(5^{-2} \times 5^{-4}\right)^{-3}$?

A) 5^{18}

B) $\frac{1}{5^{18}}$

C) -5^{18}

D) $-\frac{1}{5^{18}}$

5. ¿Cuál de las opciones corresponde a una expresión equivalente de $\left(5 \times 3^2\right)^{-2}$?

A) $5^2 \times 3^4$

B) $\frac{1}{5^2} \times \frac{1}{3^4}$

C) $-\left(5^2 \times 3^4\right)$

D) $-\left(\frac{1}{5^2} \times \frac{1}{3^4}\right)$

TEMA 6. ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Bloque V

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

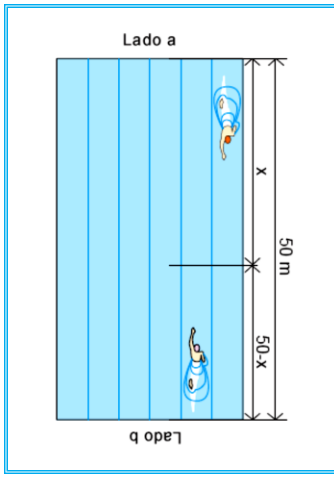
Tema: Significado y uso de las literales

Subtema: Ecuaciones

Resultado general de aprendizaje: Representa con literales los valores desconocidos de un problema y las usa para plantear y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que implican el planteamiento y solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.



Introducción:

En la figura de la tabla de arriba se muestran dos nadadores que están ubicados en los lados opuestos de una piscina cuya longitud es 50 metros. Si salen simultáneamente uno hacia el otro, nadando con rapidez constante por carriles paralelos, el primero a 6 m/s y el otro a 4 m/s. ¿En cuántos segundos y a qué distancia se cruzan los nadadores?

Para responder la pregunta es preciso notar que las incógnitas se refieren tanto al tiempo como a la distancia. En este tipo de situaciones regularmente es de utilidad el planteamiento y solución de un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** habiendo una transición del enunciado en lenguaje común al lenguaje algebraico.

Desarrollo:

A continuación te presentamos algunas maneras de solucionar problemas que implican el planteamiento de **sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** y coeficientes enteros. En primer lugar haremos una recapitulación breve sobre ecuaciones lineales con dos incógnitas y cómo se conforma un sistema de dos ecuaciones de este tipo con dos incógnitas. Posteriormente presentaremos los métodos de solución analítica de estos sistemas y finalizaremos con el planteamiento y solución de algunos problemas de aplicación.

El planteo de problemas que nacen de hechos de la vida cotidiana conduce, a menudo, al planteo de una o más ecuaciones en las que figuran una o más incógnitas y datos del problema.

Los datos e incógnitas en general, pueden relacionarse por medio de operaciones algebraicas, conduciéndonos al planteo de ecuaciones que, al quedar resueltas, conllevan a la solución de nuestro problema original.

Recuerda

*Una **ecuación** es una relación de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas llamadas **incógnitas** se pueden expresar mediante cualquier letra minúscula del abecedario generalmente se usa las letras* x, y, z. *Esta relación se indica con el símbolo "$=$", el cual se lee "igual" o "es igual a".*

*Una ecuación consta de **dos miembros**, el primer miembro es la expresión algebraica que está a lado izquierdo del símbolo "$=$" y el segundo miembro está a lado derecho. En cada miembro encontramos términos que están separados por los signos + ó -.*

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones algebraicas en las que las incógnitas son de primer grado se denominan comúnmente **ecuaciones lineales**, debido a que su representación gráfica es una línea recta. Por ejemplo,

$5x-7=0$ es una ecuación lineal de una incógnita debido a que el exponente de la única incógnita es 1,
$4x-6y=12$ es ecuación lineal de dos incógnitas debido a que el exponente de ambas incógnitas es 1.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita basta con aplicar las propiedades de la igualdad para aislar a la incógnita, así por ejemplo en $5x-7=0$ debemos en primer lugar sumar 7 unidades en ambos miembros de la igualdad y posteriormente dividir ambos miembros de la igualdad de manera que con ello encontramos que $x=\frac{7}{5}$.

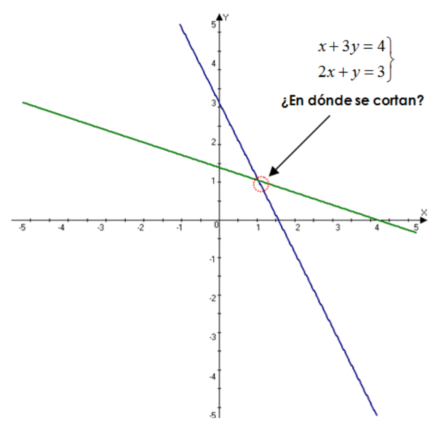
Cuando tenemos ecuaciones lineales con dos incógnitas el procedimiento para encontrar los valores de las dos incógnitas cambia pues con una sola ecuación no nos basta para conocer ambos valores. Debemos entonces tener un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** para poder encontrar los valores de cada incógnita que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

En general podemos decir que

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones del tipo: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

en donde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, son números reales y en cada una de las ecuaciones del sistema, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de 0.

Una solución común a las dos ecuaciones, es un par ordenado de números reales tal que al sustituir estos números en cada ecuación del sistema en lugar de las incógnitas x y y se obtienen dos identidades numéricas.



¿Cómo podemos resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Cada una de las ecuaciones que forman un *sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas* es *una recta que podemos representar en el plano*. El ***método gráfico*** para resolver este tipo de sistemas consiste, por tanto, en representar en el plano ambas rectas y comprobar si se cortan y, si es así, dónde.

El punto de intersección de las rectas corresponde a la solución del sistema. En el caso de la gráfica de arriba la solución del sistema (punto de intersección es $x=1$ y $y=1$. Nota que estos valores satisfacen al mismo tiempo ambas ecuaciones pues si sustituimos estos valores en las ecuaciones obtenemos un par de identidades numérica.

Para poder emplear el método gráfico debemos ser muy precisos al momento de hacer los trazos de las rectas que representan a las ecuaciones y determinar de manera muy certera su punto de intersección; sin embargo, no siempre contamos con los instrumentos apropiados para lograr una buena gráfica. Por fortuna, también existen procedimientos basados en manipulaciones algebraicas que permiten transformar las dos ecuaciones del sistema en una ecuación con una sola incógnita, denominados comúnmente ***métodos analíticos***.

Métodos analíticos de solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

A continuación te presentamos lo métodos analíticos de solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Es preciso mencionar que en todos ellos denotaremos siempre a la primera ecuación por E_1 y a la segunda ecuación por E_2 y que lo que estamos buscando es una pareja de números que satisfagan ambas ecuaciones a la vez.

1. Método de igualación

Este procedimiento consiste en seleccionar una incógnita y despejarla de las dos ecuaciones del sistema para después **igualar** las dos expresiones obtenidas de forma que se obtenga una ecuación lineal con una incógnita. En seguida se resuelve la ecuación obtenida empleando las propiedades de la igualdad y se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones donde quedo despejada la incógnita seleccionada al principio.

Pasos del método de igualación:

1. Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Igualar las expresiones despejadas y así se obtiene una ecuación lineal para la otra incógnita.
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso anterior aplicando las propiedades de la igualdad.
4. Sustituir el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas en el paso 1, con el propósito de calcular el valor de la otra incógnita.
5. Comprobar los resultados.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema $\begin{cases} 4x-2y=10 \\ 3x+5y=14 \end{cases}$ por el método de igualación.

1. Se despeja x de las ecuaciones E_1 y E_2

$$x=\frac{10+2y}{4}=\frac{5+y}{2} \qquad ; \qquad x=\frac{14-5y}{3}$$

2. Se igualan estas dos ecuaciones

$$\frac{5+y}{2}=\frac{14-5y}{3}$$

3. Se resuelve en términos de y

$$\begin{aligned} 3(5+y)&=2(14-5y) \\ 3y+10y&=28-15 \\ 13y&=13 \\ y&=1 \end{aligned}$$

4. Se sustituye este valor en la primera ecuación despejada para encontrar el valor de x

$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

5. Se realiza la comprobación

$$\begin{aligned} 4(3)-2(1)&=10 \\ 12-2&=10 \\ 10&=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(3)+5(1)&=14 \\ 9+5&=14 \\ 14&=14 \end{aligned}$$

Por tanto las solución al sistema es $x=3$ y $y=1$.

2. Método de eliminación

Este procedimiento, también conocido como método de suma y resta, consiste en igualar los coeficientes numéricos de una de las incógnitas (multiplicando o dividiendo por lo menos una de las ecuaciones por alguna cantidad adecuada) para, por medio de la suma o resta de las ecuaciones, **eliminar** la incógnita elegida y reducir el sistema a una sola ecuación lineal con una incógnita para resolverla empleando las propiedades de la igualdad.

Pasos del método de eliminación:

1. Igualar los coeficientes de una de las incógnitas, multiplicando o dividiendo por lo menos una de las ecuaciones por alguna cantidad adecuada.
2. Sumar o restar según convenga ambas ecuaciones para eliminar la incógnita de coeficientes iguales y obtener una nueva ecuación en términos solamente de la otra incógnita.
3. Resolver la ecuación lineal obtenida en paso anterior.
4. Despejar la otra incógnita de cualquiera de las ecuaciones del sistema.
5. Sustituir el valor obtenido en la expresión despejada para obtener el valor de la otra incógnita.
6. Comprobar los resultados.

Ejemplo 2:

Resolver el sistema $\begin{cases} -8x+14y=-20 \\ -5x+7y=-16 \end{cases}$ por el método de eliminación.

1. Se multiplica la ecuación E_2 por -2

$$\begin{aligned} -2(-5x+7y) &= -2(-16) \\ 10x-14y &= 32 \end{aligned}$$

2. Se suma esta nueva ecuación con al ecuación E_1

$$\begin{array}{r} -8x+14y=-20 \\ \underline{10x-14y=32} \\ 2x+0=12 \end{array}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante para x

$$\begin{aligned} 2x &= 12 \\ x &= \tfrac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

4. Se despeja y de E_1

$$y = \frac{-20+8x}{14} = \frac{-10+4x}{7}$$

5. Se sustituye $x=6$ en la ecuación despejada

$$y = \frac{-10+4x}{7} = \frac{-10+4(6)}{7} = \frac{-10+24}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

6. Se hace la comprobación

$$\begin{aligned} -8(6)+14(2) &= -20 \\ -48+28 &= -20 \\ -20 &= -20 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -5(6)+7(2) &= -16 \\ -30+14 &= -16 \\ -16 &= -16 \end{aligned}$$

Por tanto las solución al sistema es $x=6$ y $y=2$.

3. Método de sustitución

Este procedimiento consiste en despejar una de las incógnitas de alguna de las ecuaciones del sistema y **sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación, para obtener una ecuación lineal con una incógnita. En seguida se resuelve la ecuación obtenida empleando las propiedades de la igualdad.

Pasos del método de sustitución:

1. Despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones.
2. Sustituir la expresión despejada en la otra ecuación.
3. Resolver la ecuación lineal obtenida en el paso anterior.
4. Sustituir este valor en la expresión despejada para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Se realiza la comprobación.

Ejemplo 3:

Resolver el sistema $\begin{cases} 10x+4y=-34 \\ -5x+2y=13 \end{cases}$ por el método de sustitución.

1. Se despeja x de la ecuación E_1

$$x=\frac{-34-4y}{10}=\frac{-17-2y}{5}$$

2. Se sustituye le expresión despejada en E_2

$$-5\left(\frac{-17-2y}{5}\right)+2y=13$$
$$17+4y=13$$

3. Se resuelve la ecuación lineal para y

$$17+4y=13$$
$$y=\frac{13-17}{4}$$
$$y=-1$$

4. Se sustituye $y=-1$ en la ecuación despejada anteriormente para obtener el valor de x

$$x=\frac{-34-4(-1)}{10}=\frac{-34+4}{10}=\frac{-30}{10}=-3$$

5. Se realiza la comprobación

$$10(-3)+4(-1)=-34$$
$$-30-4=-34$$
$$-34=-34$$

$$-5(-3)+2(-1)=13$$
$$15-2=13$$
$$13=13$$

Por tanto las solución al sistema es $x=-3$ y $y=-1$.

Actividad

Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas empleando cada uno de los métodos expuestos (igualación, eliminación y sustitución).

1. $\begin{cases} 3x+y=10 \\ 5x-2y=2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y=10 \\ 7x+3y=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x-3y=-6 \\ x+y=7 \end{cases}$

Solución de problemas con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

A continuación mostraremos la utilidad de lo que hemos expuesto ya que con frecuencia nos encontramos con situaciones en las que intervienen dos cantidades desconocidas y nos vemos en la necesidad del planteamiento y solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para resolver tales situaciones. Mostraremos algunos ejemplos de cómo plantear las ecuaciones a partir de un enunciado en el lenguaje común, dando los valores de las incógnitas que resuelven el sistema planteado. Dejaremos para ti el ejercicio de verificar, por cualquiera de los métodos expuestos que los valores dados sean correctos.

Situación 1:

Un almacenista tiene dulces de $45 el kilo y otros de $70 el kilo. Quiere hacer una mezcla de 120 kilos que resulten a $55 el kilo. ¿Cuántos kilos de cada clase deberá poner?

Si definimos a x y a y como la cantidad de kilos de los dulces de a $45 y de a $70 , respectivamente y considerando que la mezcla de dulces debe pesar 120 kilos podemos planteare la ecuación $x+y=120$; por otro lado el costo por kilo de la mezcla debe de ser $55 por lo que el costo total de la mezcla es $\$55\times 120=\$6600$ y esto debe de ser igual a la suma del costo de la cantidad de kilos de x y del costo de la cantidad de kilos de y, es decir $45x+70y=6600$. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	*Sistema de Ecuaciones*
$x=$ *kilos de dulces de $45*	$\begin{cases} x+\quad y=120 \\ 45x+70y=6600 \end{cases}$
$y=$ *kilos de dulces de $70*	

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que para elaborar la mezcla deseada el almacenista tiene que poner **72 kilos de dulces de a $45 y 48 kilos de dulces de a $70**.

Situación 2:

El mes pasado Juan compró 6 kilos de café y 5 kilos de té, en total gasto $56. Hace una semana con $58 le alcanzó para 4 kilos de té y 7 kilos de café. Ahora él desea saber cuanto cuesta un kilo de café y cuanto cuesta un kilo de té. ¿Podrías ayudarlo a encontrar la respuesta?

Si definimos a x como el costo del kilo de café y a y como el costo del kilo de té, del problema planteado podemos decir que el mes pasado Juan compro $6x+5y=56$ pesos y la semana pasada Juan gasto $4y+7x=58$ pesos. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	*Sistema de Ecuaciones*
$x=$ *costo del kilo de café*	$\begin{cases} 6x+5y=56 \\ 7x+4y=58 \end{cases}$
$y=$ *costo del kilo de té*	

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que a Juan le cuesta **el kilo de café a $6 y el kilo de té a $4.**

Situación 3:

Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres y cuatro motores. Si en toda la flota hay 170 motores. ¿Cuántos aviones de tres motores hay? ¿Y cuantos hay de cuatro motores?

Si definimos a t como el número de aviones con tres motores y a c como el número de aviones con cuatro motores, entonces del problema planteado tenemos, que considerando que se tienen 20 aviones bimotores, la compañía cuenta con $20+t+c=55$ aviones; por otra parte, el número total de motores se obtiene multiplicando por 2 al número de aviones de dos motores, por 3 al número de aviones de tres motores y por 4 al número de aviones de cuatro motores, es decir, $2(20)+3t+4c=170$ motores. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	*Sistema de Ecuaciones*
$t =$ *aviones con tres motores* $c =$ *aviones con cuatro motores*	$\begin{cases} t+c=35 \\ 3t+4c=130 \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que la compañía de aviación cuenta con **10 aviones de tres motores y 25 aviones de 4 motores**.

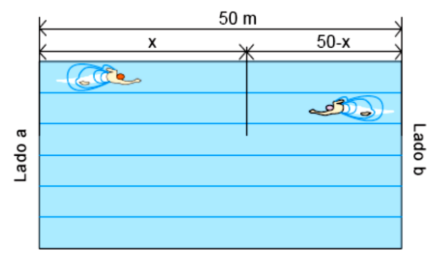
Actividad

Para cada uno de los siguientes problemas plantea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y encuentra la solución.

1. En una biblioteca hay un total de 68 libros entre libros de Español y Matemáticas de nivel básico, si la cantidad de libros de Español es el triple que la cantidad de libros de Matemáticas. ¿Cuántos libros de cada tipo hay en la biblioteca?
2. En una zapateria hay una promoción de calzados. Por 2 pares de botas y tres pares de zapatillas se paga $3000. Si el par de zapatillas vale $30 menos que el par de botas. ¿Cuánto cuesta el par de zapatillas y el par de botas?
3. El precio de 3 borradores y 5 libretas es $360. Si la libreta cuesta el triple de lo que cuesta un borrador. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
4. Se va a pintar el muro de una escuela que tienen forma rectangular y se necesita saber su superficie para estimar la cantidad de pintura que se ocupará. Si se sabe que el perímetro del muro mide 26 metros y que su base mide 7 metros más que su altura. ¿Cuál es el área del muro?

Ahora, reconsideremos el problema planteado en la introducción:

En la figura se muestran dos nadadores que están ubicados en los lados opuestos de una piscina cuya longitud es 50 metros. Si salen simultáneamente uno hacia el otro, nadando con rapidez constante por carriles paralelos, el primero a 6 m/s y el otro a 4 m/s. ¿En cuántos segundos y a qué distancia se cruzan los nadadores?



En el problema observa que si ambos nadadores se cruzan al cabo de t segundos a una distancia de x metros del lado a, mientras el primero ha recorrido x metros el segundo ha recorrido $50-x$ metros.

La velocidad es igual a la distancia recorrida sobre tiempo de recorrido, $v=\frac{d}{t}$, para el primer nadador $d=x$, o sea que $v=\frac{x}{t}$, de lo anterior tenemos que $x=vt$.

Como la velocidad del primer nadador es $6\frac{m}{s}$ entonces $x=6t$. Análogamente, para el segundo nadador $d=50-x$ y obtenemos la ecuación $50-x=4t$.

De lo anterior se pueden escribir entonces las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 6t \\ 50-x &= 4t \end{aligned}$$

Y así obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolviendo el sistema tenemos que

$$\begin{aligned} 50-6t &= 4t \\ 10t &= 50 \\ t &= 5 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x &= 6(5) \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Lo cuál quiere decir que los nadadores se encuentra en un tiempo $t=5\text{ s}$ y a una distancia $x=30\text{ m}$ lado "a" de la piscina.

Cierre:

En este tema hemos hecho un repaso breve ecuaciones lineales con dos incógnitas y cómo se conforma un sistema de dos ecuaciones de este tipo con dos incógnitas. Así mismo, se presentaron los métodos de solución analítica de estos sistemas y se mostro su utilidad en el planteamiento y solución de algunos problemas de aplicación.

Aquí te presentamos un esquema que resume las formas en que se pueden resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

¿Cómo se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Gráficamente

Se representan las dos rectas en un mismo sistema de coordenadas y se determinan, con la mayor precisión posible, las coordenadas del punto de corte. Para esto se puede usar papel milimetrado o un software.

Analíticamente

Se usan métodos basados en manipulaciones algebraicas: igualación, sustitución o reducción, que permiten transformar las ecuaciones del sistema a una ecuación con una sóla incógnita.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t01_s01_descartes/TS_1_index.html

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t03_s01_descartes/TS_1_index.html

http://www.yair.es/xms/algebra/sistemas/elementales/imagenes/elementales.swf

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Cuál de los siguientes problemas se resuelve con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x+2y&=65 \\ x&=3y \end{aligned}$$

A) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 65 cm y que su base es el triple de su altura?

B) ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado si cada lado equivale a un cuarto de su área y esta es igual a 65?

C) ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo sabiendo que su largo es el doble de su ancho y que su área es igual a 65?

D) ¿Cuál es el área de un cuadrado sabiendo que cada lado equivale a $2x-1$ y que su perímetro es igual a 65?

2. Cuál de los siguientes problemas se resuelve con el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x&=4y \\ x+y&=70 \end{aligned}$$

A) Pancho es mayor que José por cuatro años, la suma de sus edades es 70 años. Calcular las edades.

B) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la edad de pancho es igual a la edad de José mas 70. Calcular las edades.

C) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la diferencia de sus edades es 70 años. Calcular las edades.

D) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la suma de sus edades es 70 años. Calcular las edades.

3. Lee el siguiente problema:

El perímetro de un rectángulo mide 36 cm y la diferencia entre la base y la altura es de 8 cm. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema?

A) $\begin{aligned} x+y&=36 \\ x-y&=8 \end{aligned}$

C) $\begin{aligned} 2x+y&=36 \\ x-y&=8 \end{aligned}$

B) $\begin{aligned} x+y&=36 \\ \frac{x}{y}&=8 \end{aligned}$

D) $\begin{aligned} 2x+2y&=36 \\ x-y&=8 \end{aligned}$

4. El precio de 5 lápices y 7 bolígrafos es $155. Si un lápiz cuesta $5 menos que un lapicero. ¿Cuál es el precio de un lápiz?

A) 10

B) 12

C) 15

D) 16

5. El cajero de un cine sabe que en una sala hay 500 butacas ocupadas y que el total de dinero en caja por las entradas a esa sala es de $13000 Si cada adulto pagó $30 y cada niño pagó $20 por su entrada. ¿Cuántos adultos y cuantos niños hay en la sala?

A) 350 adultos y 150 niños

B) 300 adultos y 200 niños

C) 150 adultos y 350 niños

D) 200 adultos y 300 niños

Anexo 1. Clave de respuestas correctas de las evaluaciones

TEMA 1

No.	A	B	C	D
1.	○	○	●	○
2.	●	○	○	○
3.	○	○	●	○
4.	○	●	○	○
5.	○	●	○	○

TEMA 4

No.	A	B	C	D
1.	○	●	○	○
2.	●	○	○	○
3.	○	○	●	○
4.	○	○	●	○

TEMA 2

No.	A	B	C	D
1.	○	●	○	○
2.	○	●	○	○
3.	○	○	●	○
4.	○	●	○	○
5.	○	○	○	●

TEMA 5

No.	A	B	C	D
1.	○	○	●	○
2.	○	○	●	○
3.	○	○	●	○
4.	●	○	○	○
5.	○	●	○	○

TEMA 3

No.	A	B	C	D
1.	●	○	○	○
2.	○	●	○	○
3.	○	○	●	○
4.	○	○	○	●
5.	○	○	●	○

TEMA 6

No.	A	B	C	D
1.	●	○	○	○
2.	○	○	○	●
3.	○	○	○	●
4.	●	○	○	○
5.	○	●	○	○

HOJA DE RESPUESTAS	
Nombre	
Escuela	
Grado	
Grupo	

Instrucciones:
Contesta las preguntas de la evaluación de cada tema presentado, rellenando con lápiz el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

TEMA 1

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 4

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○

TEMA 2

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 5

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

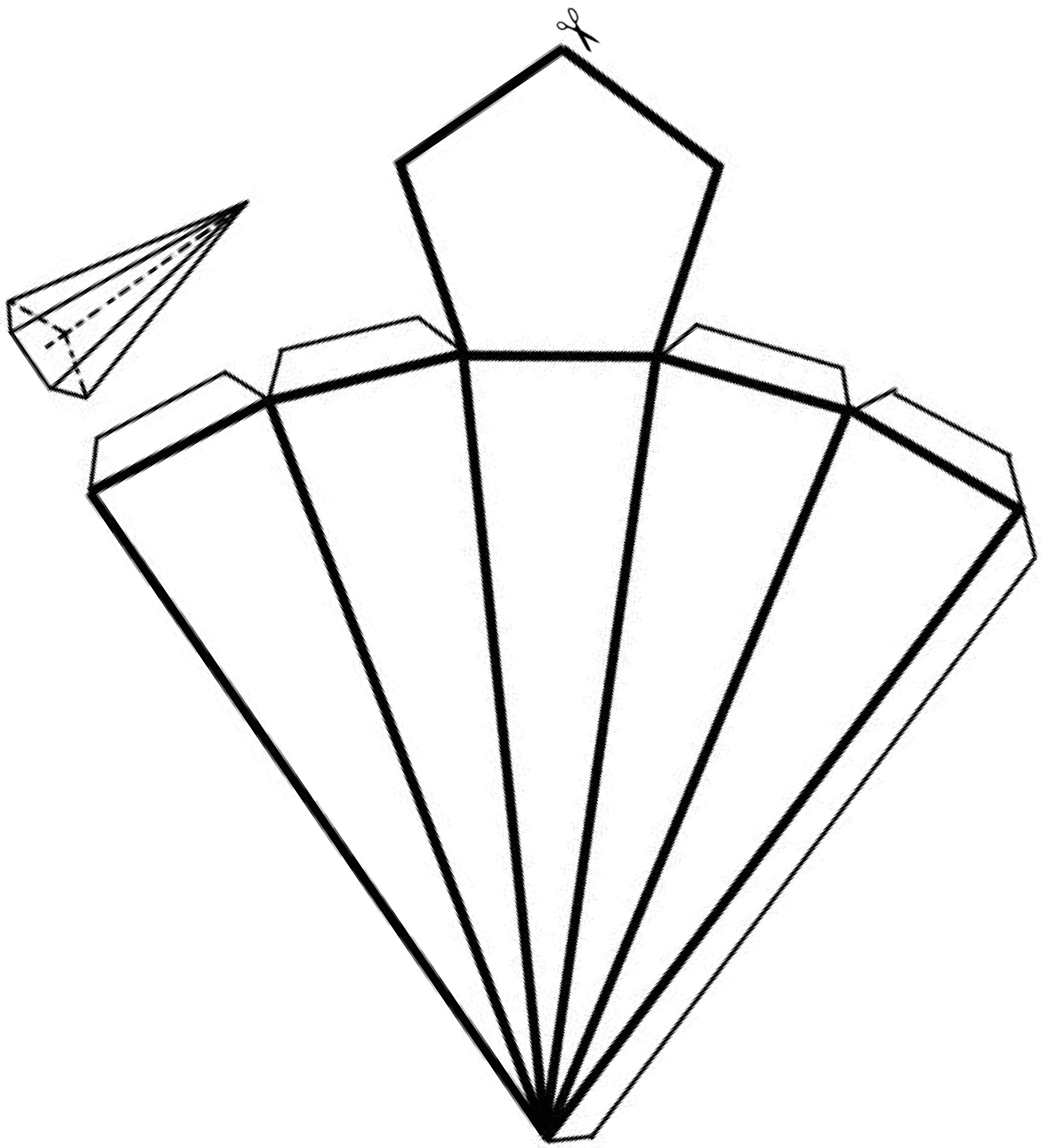
TEMA 3

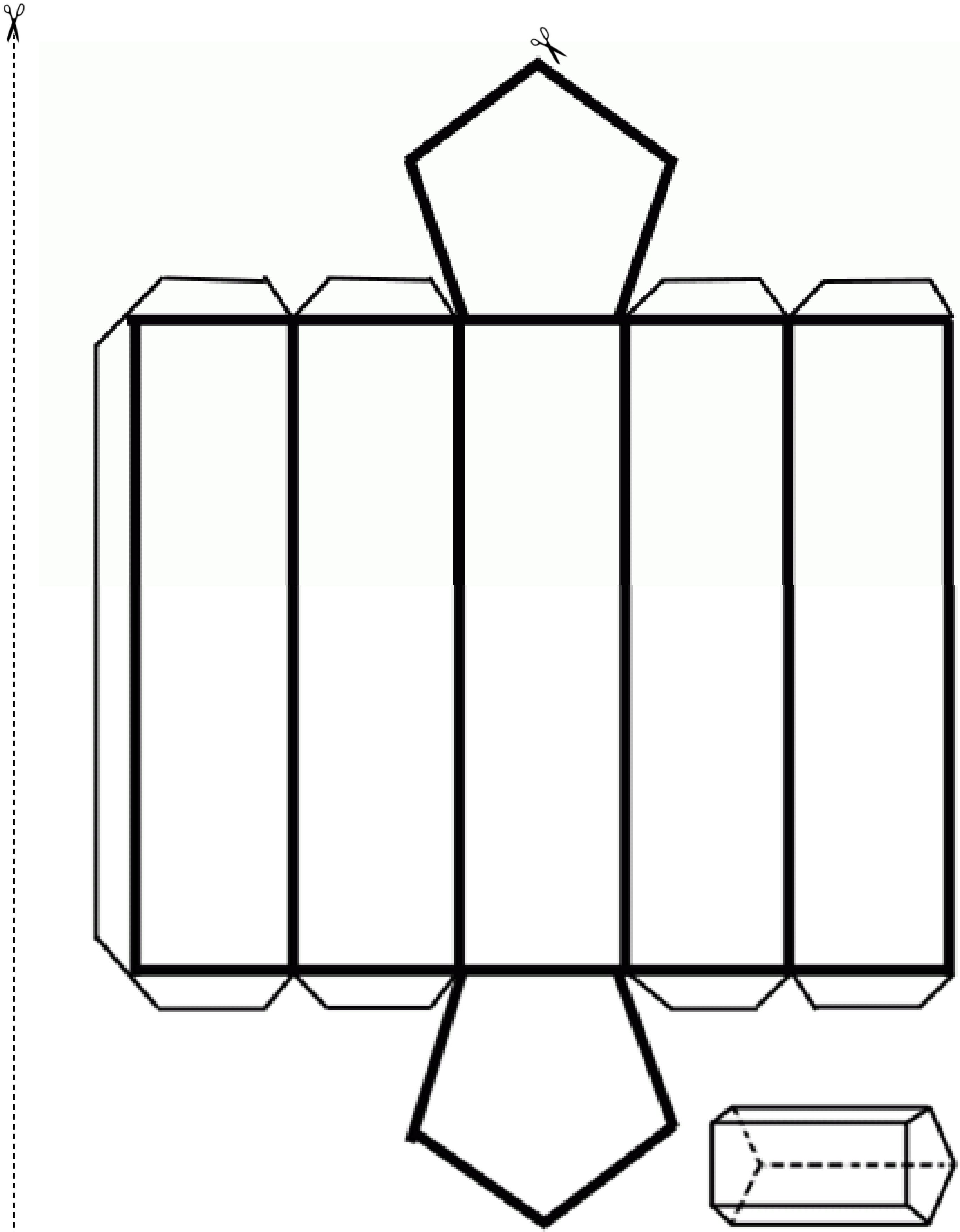
No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 6

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

Anexo 2. Patrones para recortar y armar un prisma y una pirámide pentagonal





SECRETARÍA
DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE
GUANAJUATO