Desarrollo de Habilidades Matemáticas

SECUNDARIA

3er. Grado

1234567890987654321

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN

GOBIERNO DE GUANAJUATO

Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Tercer grado de secundaria fue desarrollado por la Dirección de Medios y Métodos Educativos, de la Dirección General para la Pertinencia y la Corresponsabilidad de la Educación, Secretaría de Educación de Guanajuato.

Secretaría de Educación de Guanajuato

Subsecretaría para el Desarrollo Educativo

Dirección General para la Pertinencia y la Corresponsabilidad de la Educación

Dirección de Medios y Métodos Educativos

Departamento de Matemáticas

Primera edición, 2012

Secretaría de Educación de Guanajuato, 2012
Conjunto Administrativo Pozuelos s/n, Centro,
36000, Guanajuato, Gto.

Impreso en México
Distribución Gratuita – Prohibida su venta

Presentación

A las maestras y maestros:

La evaluación es un proceso necesario para identificar los aprendizajes que las alumnas y los alumnos han adquirido satisfactoriamente y aquellos que deberán ser reforzados.

Año con año, la Secretaría de Educación Pública aplica la prueba ENLACE a todas las primarias y secundarias del país, para tener información sobre el desempeño escolar de los alumnos.

En este contexto, ***Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Tercer grado de secundaria*** es un material que tiene como propósito ofrecerles una herramienta de apoyo que les permita guiar a sus alumnos en la preparación para la prueba ENLACE 2012, a través de una serie de actividades elaboradas con base en el programa de estudio de matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2011.

Los invitamos a que aprovechen este recurso y que apoyen a sus alumnos en el uso del mismo, de modo que les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora. Para ello, les sugerimos atender las ***Orientaciones metodológicas*** que se encuentran en este cuadernillo.

Estamos seguros de que con su compromiso y colaboración continuaremos trabajando para hacer de Guanajuato un estado de acciones encaminadas a mejorar la calidad de la educación.

A las alumnas y alumnos:

La evaluación es un elemento necesario en tu proceso de aprendizaje, ya que mediante ella te es posible detectar cuáles son los temas y contenidos que dominas y aquellos que necesitas fortalecer.

La prueba ENLACE, que año con año se aplica a todas las primarias y secundarias del país, tiene la finalidad de evaluar tus conocimientos en el área de español, matemáticas y una tercera asignatura, y ofrecerte un diagnóstico individual sobre los conocimientos y habilidades en los temas evaluados.

Durante este ciclo escolar, la Secretaría de Educación de Guanajuato pone a tu disposición el material ***Desarrollo de habilidades matemáticas. Cuadernillo de apoyo 2012. Tercer grado de secundaria***, el cual fue elaborado con el propósito de servirte como una herramienta de preparación para la prueba Enlace 2012. Este cuadernillo contiene una serie de actividades elaboradas con base en el programa de estudio de matemáticas para fortalecer los temas clave determinados a partir de los resultados de la prueba ENLACE 2011.

Es importante que para realizar el trabajo que te propone este cuadernillo, te apoyes en tu maestro de la asignatura de matemáticas, ya que él te podrá orientar en el uso del mismo.

Recuerda que la evaluación es un complemento de tu aprendizaje, por lo que te invitamos a considerar este proceso como una oportunidad para analizar tu desempeño escolar.

¿Cómo está organizado el cuadernillo de apoyo?

El cuadernillo está diseñado por temas. Cada lección iniciará con la siguiente información:

Bloque del programa de estudio que incluye el tema a revisar.

Aprendizaje que el alumno debe adquirir en ese bloque, eje temático y tema, de acuerdo al programa de estudio.

Tema del que tratará la lección.

Eje temático al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

Tema general al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

Subtema específico al que corresponde la lección, de acuerdo al programa de estudio.

TEMA 5. CORTES EN ESFERAS Y CONOS

Bloque V

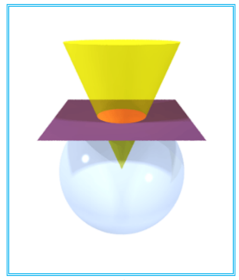
Eje temático: Forma, espacio y medida

Tema: Formas geométricas

Subtema: Cuerpos geométricos

Resultado general de aprendizaje: Anticipa cómo cambia el volumen de esferas, cilindros y conos al aumentar o disminuir alguna de sus dimensiones.

Resultado específico de aprendizaje:
Determina la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto.



Aprendizaje específico que se desea lograr en la lección.

Presenta una **imagen** alusiva al tema.

Cada tema incluye cuatro secciones que se describen a continuación:

Introducción

Consiste en el planteamiento general del tema que se va a trabajar. Esta sección incluye una situación cotidiana que permite retomar los conocimientos previos sobre el tema.

Desarrollo

Constituye la parte más amplia del tema, ya que contiene la presentación de contenidos y actividades que permiten fortalecer los aprendizajes que serán evaluados.

Cierre

Incluye una breve descripción de los contenidos retomados en la lección. También contiene sitios de interés que se pueden consultar para ampliar los conocimientos sobre el tema.

Evaluación

En esta sección se deberá resolver una evaluación sobre los contenidos retomados en la lección. Es importante que se utilice la ***Hoja de respuestas*** que se encuentra en la parte posterior del cuadernillo, ya que es necesario practicar el llenado de los círculos que presenta la prueba tipo ENLACE.

Orientaciones metodológicas

Este cuadernillo ha sido diseñado con la finalidad de que los alumnos procesen la información y desarrollen las actividades y evaluaciones contenidas en cada uno de los temas, de manera individual, empleando tiempo extra clase. Sin embargo, será de gran apoyo las orientaciones y retroalimentaciones que puedan obtener de la maestra o maestro que les imparte la asignatura de matemáticas.

En este sentido, se solicita a las maestras y los maestros que atiendan a las siguientes orientaciones metodológicas, para apoyar muy comprometidamente a sus alumnos, de modo que este recurso didáctico les pueda servir como una herramienta de fortalecimiento y mejora.

- En un primer momento, acompañar a los alumnos en la lectura de la presentación y organización del cuadernillo. Identificar y comentar con ellos las temas específicos que han sido desarrollados. Esto se puede hacer de manera grupal en un espacio de clase no mayor a 10 minutos.

- Previo al estudio de un tema:

  Presentar la situación planteada en la introducción. Esto con la intención de generar una activación cognitiva en los alumnos en relación con la temática a estudiar.

  Orientar la atención de los alumnos sobre los aspectos del tema en los que deberán poner especial cuidado al momento de procesar la información y realizar las actividades y evaluaciones plantedas.
  Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 7 minutos.

- Posterior al estudio de un tema:

  Retroalimentar el aprendizaje de los alumnos mediante una actividad grupal en la que hagan una recapitulación breve sobre el desarrollo de las actividades y las soluciones de la evaluación. Esto con la intención de socializar el aprendizaje individual de los alumnos y resolver las dudas que se presenten.
  Se recomienda que esto se realice al finalizar una clase, en un lapso no mayor a 12 minutos.

Esperamos que estas orientaciones sean de utilidad para lograr el fortalecimiento de los temas clave que contiene el cuadernillo y generar la adquisición de los aprendizajes esperados en los alumnos.

Contenido

TEMA 1. ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS[1]

Bloque V

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

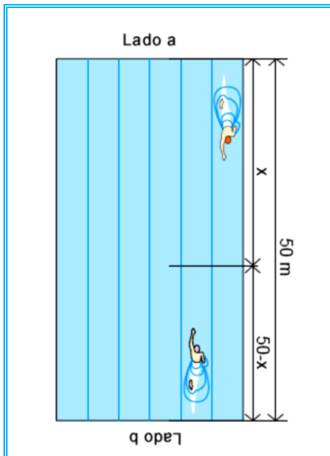
Tema: Significado y uso de las literales

Subtema: Ecuaciones

Resultado general de aprendizaje: Representa con literales los valores desconocidos de un problema y las usa para plantear y resolver un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que implican el planteamiento y solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.



Introducción:

En la figura de la tabla de arriba se muestran dos nadadores que están ubicados en los lados opuestos de una piscina cuya longitud es 50 metros. Si salen simultáneamente uno hacia el otro, nadando con rapidez constante por carriles paralelos, el primero a 6 m/s y el otro a 4 m/s. ¿En cuántos segundos y a qué distancia se cruzan los nadadores?

Para responder la pregunta es preciso notar que las incógnitas se refieren tanto al tiempo como a la distancia. En este tipo de situaciones regularmente es de utilidad el planteamiento y solución de un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** habiendo una transición del enunciado en lenguaje común al lenguaje algebraico.

Desarrollo:

A continuación te presentamos algunas maneras de solucionar problemas que implican el planteamiento de **sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** y coeficientes enteros. En primer lugar haremos una recapitulación breve sobre ecuaciones lineales con dos incógnitas y cómo se conforma un sistema de dos ecuaciones de este tipo con dos incógnitas. Posteriormente presentaremos los métodos de solución analítica de estos sistemas y finalizaremos con el planteamiento y solución de algunos problemas de aplicación.

El planteo de problemas que nacen de hechos de la vida cotidiana conduce, a menudo, al planteo de una o más ecuaciones en las que figuran una o más incógnitas y datos del problema.

Los datos e incógnitas en general, pueden relacionarse por medio de operaciones algebraicas, conduciéndonos al planteo de ecuaciones que, al quedar resueltas, conllevan a la solución de nuestro problema original.

Recuerda

*Una **ecuación** es una relación de igualdad entre cantidades, algunas de ellas desconocidas llamadas **incógnitas** se pueden expresar mediante cualquier letra minúscula del abecedario generalmente se usa las letras* x, y, z. *Esta relación se indica con el símbolo "$=$", el cual se lee "igual" o "es igual a".*

*Una ecuación consta de **dos miembros**, el primer miembro es la expresión algebraica que está a lado izquierdo del símbolo "$=$" y el segundo miembro está a lado derecho. En cada miembro encontramos términos que están separados por los signos + ó -.*

[1] Nota: Este tema y la información de la tabla corresponden al programa de estudio de 2do grado. Se incluye en este cuadernillo por haberse encontrado un reactivo relacionado con este tema y con un alto porcentaje de error en la prueba ENLACE de 3er grado.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las ecuaciones algebraicas en las que las incógnitas son de primer grado se denominan comúnmente **ecuaciones lineales**, debido a que su representación gráfica es una línea recta. Por ejemplo,

$5x-7=0$ es una ecuación lineal de una incógnita debido a que el exponente de la única incógnita es 1,
$4x-6y=12$ es ecuación lineal de dos incógnitas debido a que el exponente de ambas incógnitas es 1.

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita basta con aplicar las propiedades de la igualdad para aislar a la incógnita, así por ejemplo en $5x-7=0$ debemos en primer lugar sumar 7 unidades en ambos miembros de la igualdad y posteriormente dividir ambos miembros de la igualdad de manera que con ello encontramos que $x=\frac{7}{5}$.

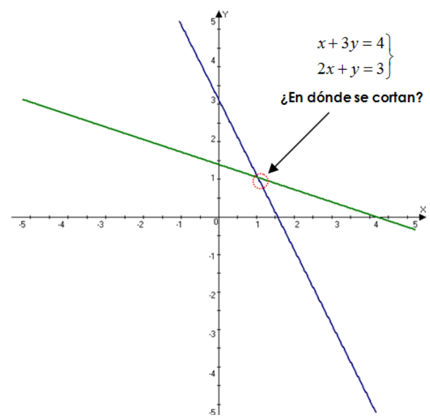
Cuando tenemos ecuaciones lineales con dos incógnitas el procedimiento para encontrar los valores de las dos incógnitas cambia pues con una sola ecuación no nos basta para conocer ambos valores. Debemos entonces tener un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** para poder encontrar los valores de cada incógnita que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

En general podemos decir que

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un par de ecuaciones del tipo: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

en donde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, son números reales y en cada una de las ecuaciones del sistema, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de 0.

Una solución común a las dos ecuaciones, es un par ordenado de números reales tal que al sustituir estos números en cada ecuación del sistema en lugar de las incógnitas x y y se obtienen dos identidades numéricas.



¿Cómo podemos resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Cada una de las ecuaciones que forman un *sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas* es *una recta que podemos representar en el plano*. El ***método gráfico*** para resolver este tipo de sistemas consiste, por tanto, en representar en el plano ambas rectas y comprobar si se cortan y, si es así, dónde.

El punto de intersección de las rectas corresponde a la solución del sistema. En el caso de la gráfica de arriba la solución del sistema (punto de intersección es $x=1$ y $y=1$. Nota que estos valores satisfacen al mismo tiempo ambas ecuaciones pues si sustituimos estos valores en las ecuaciones obtenemos un par de identidades numérica.

Para poder emplear el método gráfico debemos ser muy precisos al momento de hacer los trazos de las rectas que representan a las ecuaciones y determinar de manera muy certera su punto de intersección; sin embargo, no siempre contamos con los instrumentos apropiados para lograr una buena gráfica. Por fortuna, también existen procedimientos basados en manipulaciones algebraicas que permiten transformar las dos ecuaciones del sistema en una ecuación con una sola incógnita, denominados comúnmente ***métodos analíticos***.

Métodos analíticos de solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

A continuación te presentamos lo métodos analíticos de solución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Es preciso mencionar que en todos ellos denotaremos siempre a la primera ecuación por E_1 y a la segunda ecuación por E_2 y que lo que estamos buscando es una pareja de números que satisfagan ambas ecuaciones a la vez.

1. Método de igualación

Este procedimiento consiste en seleccionar una incógnita y despejarla de las dos ecuaciones del sistema para después **igualar** las dos expresiones obtenidas de forma que se obtenga una ecuación lineal con una incógnita. En seguida se resuelve la ecuación obtenida empleando las propiedades de la igualdad y se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones donde quedo despejada la incógnita seleccionada al principio.

Pasos del método de igualación:

1. Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Igualar las expresiones despejadas y así se obtiene una ecuación lineal para la otra incógnita.
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso anterior aplicando las propiedades de la igualdad.
4. Sustituir el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas en el paso 1, con el propósito de calcular el valor de la otra incógnita.
5. Comprobar los resultados.

Ejemplo 1:

Resolver el sistema $\begin{cases} 4x-2y=10 \\ 3x+5y=14 \end{cases}$ por el método de igualación.

1. Se despeja x de las ecuaciones E_1 y E_2

$$x=\frac{10+2y}{4}=\frac{5+y}{2} \qquad ; \qquad x=\frac{14-5y}{3}$$

2. Se igualan estas dos ecuaciones

$$\frac{5+y}{2}=\frac{14-5y}{3}$$

3. Se resuelve en términos de y

$$\begin{aligned} 3(5+y)&=2(14-5y) \\ 3y+10y&=28-15 \\ 13y&=13 \\ y&=1 \end{aligned}$$

4. Se sustituye este valor en la primera ecuación despejada para encontrar el valor de x

$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

5. Se realiza la comprobación

$$\begin{aligned} 4(3)-2(1)&=10 \\ 12-2&=10 \\ 10&=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(3)+5(1)&=14 \\ 9+5&=14 \\ 14&=14 \end{aligned}$$

Por tanto las solución al sistema es $x=3$ y $y=1$.

2. Método de eliminación

Este procedimiento, también conocido como método de suma y resta, consiste en igualar los coeficientes numéricos de una de las incógnitas (multiplicando o dividiendo por lo menos una de las ecuaciones por alguna cantidad adecuada) para, por medio de la suma o resta de las ecuaciones, **eliminar** la incógnita elegida y reducir el sistema a una sola ecuación lineal con una incógnita para resolverla empleando las propiedades de la igualdad.

Pasos del método de eliminación:

1. Igualar los coeficientes de una de las incógnitas, multiplicando o dividiendo por lo menos una de las ecuaciones por alguna cantidad adecuada.
2. Sumar o restar según convenga ambas ecuaciones para eliminar la incógnita de coeficientes iguales y obtener una nueva ecuación en términos solamente de la otra incógnita.
3. Resolver la ecuación lineal obtenida en paso anterior.
4. Despejar la otra incógnita de cualquiera de las ecuaciones del sistema.
5. Sustituir el valor obtenido en la expresión despejada para obtener el valor de la otra incógnita.
6. Comprobar los resultados.

Ejemplo 2:

Resolver el sistema $\begin{cases} -8x+14y=-20 \\ -5x+7y=-16 \end{cases}$ por el método de eliminación.

1. Se multiplica la ecuación E_2 por -2

$$-2(-5x+7y)=-2(-16)$$
$$10x-14y=32$$

2. Se suma esta nueva ecuación con al ecuación E_1

$$\begin{array}{r} -8x+14y=-20 \\ \underline{10x-14y=32} \\ 2x+0=12 \end{array}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante para x

$$2x=12$$
$$x=\tfrac{12}{2}=6$$

4. Se despeja y de E_1

$$y=\frac{-20+8x}{14}=\frac{-10+4x}{7}$$

5. Se sustituye $x=6$ en la ecuación despejada

$$y=\frac{-10+4x}{7}=\frac{-10+4(6)}{7}=\frac{-10+24}{7}=\frac{14}{7}=2$$

6. Se hace la comprobación

$$\begin{array}{rr} -8(6)+14(2)=-20 & -5(6)+7(2)=-16 \\ -48+28=-20 & -30+14=-16 \\ -20=-20 & -16=-16 \end{array}$$

Por tanto las solución al sistema es $x=6$ y $y=2$.

3. Método de sustitución

Este procedimiento consiste en despejar una de las incógnitas de alguna de las ecuaciones del sistema y **sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación, para obtener una ecuación lineal con una incógnita. En seguida se resuelve la ecuación obtenida empleando las propiedades de la igualdad.

Pasos del método de sustitución:

1. Despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones.
2. Sustituir la expresión despejada en la otra ecuación.
3. Resolver la ecuación lineal obtenida en el paso anterior.
4. Sustituir este valor en la expresión despejada para obtener el valor de la otra incógnita.
5. Se realiza la comprobación.

Ejemplo 3:

Resolver el sistema $\begin{cases} 10x + 4y = -34 \\ -5x + 2y = 13 \end{cases}$ por el método de sustitución.

1. Se despeja x de la ecuación E_1

$$x = \frac{-34 - 4y}{10} = \frac{-17 - 2y}{5}$$

2. Se sustituye le expresión despejada en E_2

$$\begin{aligned} -5\left(\frac{-17 - 2y}{5}\right) + 2y &= 13 \\ 17 + 4y &= 13 \end{aligned}$$

3. Se resuelve la ecuación lineal para y

$$\begin{aligned} 17 + 4y &= 13 \\ y &= \frac{13 - 17}{4} \\ y &= -1 \end{aligned}$$

4. Se sustituye $y = -1$ en la ecuación despejada anteriormente para obtener el valor de x

$$x = \frac{-34 - 4(-1)}{10} = \frac{-34 + 4}{10} = \frac{-30}{10} = -3$$

5. Se realiza la comprobación

$$\begin{aligned} 10(-3) + 4(-1) &= -34 \\ -30 - 4 &= -34 \\ -34 &= -34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5(-3) + 2(-1) &= 13 \\ 15 - 2 &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned}$$

Por tanto las solución al sistema es $x = -3$ y $y = -1$.

Actividad

Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas empleando cada uno de los métodos expuestos (igualación, eliminación y sustitución).

1. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x - y = 10 \\ 7x + 3y = 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Solución de problemas con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

A continuación mostraremos la utilidad de lo que hemos expuesto ya que con frecuencia nos encontramos con situaciones en las que intervienen dos cantidades desconocidas y nos vemos en la necesidad del planteamiento y solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para resolver tales situaciones. Mostraremos algunos ejemplos de cómo plantear las ecuaciones a partir de un enunciado en el lenguaje común, dando los valores de las incógnitas que resuelven el sistema planteado. Dejaremos para ti el ejercicio de verificar, por cualquiera de los métodos expuestos que los valores dados sean correctos.

Situación 1:

Un almacenista tiene dulces de $45 el kilo y otros de $70 el kilo. Quiere hacer una mezcla de 120 kilos que resulten a $55 el kilo. ¿Cuántos kilos de cada clase deberá poner?

Si definimos a x y a y como la cantidad de kilos de los dulces de a \$45 y de a \$70 , respectivamente y considerando que la mezcla de dulces debe pesar 120 kilos podemos planteare la ecuación $x+y=120$; por otro lado el costo por kilo de la mezcla debe de ser \$55 por lo que el costo total de la mezcla es $\$55\times 120=\$6600$ y esto debe de ser igual a la suma del costo de la cantidad de kilos de x y del costo de la cantidad de kilos de y, es decir $45x+70y=6600$. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	*Sistema de Ecuaciones*
$x=$ *kilos de dulces de \$45* $y=$ *kilos de dulces de \$70*	$\begin{cases} x+\quad y=120 \\ 45x+70y=6600 \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que para elaborar la mezcla deseada el almacenista tiene que poner **72 kilos de dulces de a \$45 y 48 kilos de dulces de a \$70**.

Situación 2:

El mes pasado Juan compró 6 kilos de café y 5 kilos de té, en total gasto $56. Hace una semana con $58 le alcanzó para 4 kilos de té y 7 kilos de café. Ahora él desea saber cuanto cuesta un kilo de café y cuanto cuesta un kilo de té. ¿Podrías ayudarlo a encontrar la respuesta?

Si definimos a x como el costo del kilo de café y a y como el costo del kilo de té, del problema planteado podemos decir que el mes pasado Juan compro $6x+5y=56$ pesos y la semana pasada Juan gasto $4y+7x=58$ pesos. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	*Sistema de Ecuaciones*
$x=$ *costo del kilo de café* $y=$ *costo del kilo de té*	$\begin{cases} 6x+5y=56 \\ 7x+4y=58 \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que a Juan le cuesta **el kilo de café a \$6 y el kilo de té a \$4.**

Situación 3:

Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres y cuatro motores. Si en toda la flota hay 170 motores. ¿Cuántos aviones de tres motores hay? ¿Y cuantos hay de cuatro motores?

Si definimos a t como el número de aviones con tres motores y a c como el número de aviones con cuatro motores, entonces del problema planteado tenemos, que considerando que se tienen 20 aviones bimotores, la compañía cuenta con $20+t+c=55$ aviones; por otra parte, el número total de motores se obtiene multiplicando por 2 al número de aviones de dos motores, por 3 al número de aviones de tres motores y por 4 al número de aviones de cuatro motores, es decir, $2(20)+3t+4c=170$ motores. Podemos resumir lo anterior de la siguiente manera:

Incógnitas	*Sistema de Ecuaciones*
$t=$ *aviones con tres motores* $c=$ *aviones con cuatro motores*	$\begin{cases} t+c=35 \\ 3t+4c=130 \end{cases}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a la conclusión de que la compañía de aviación cuenta con **10 aviones de tres motores y 25 aviones de 4 motores**.

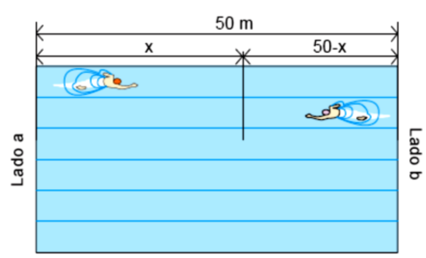
Actividad

Para cada uno de los siguientes problemas plantea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y encuentra la solución.

1. En una biblioteca hay un total de 68 libros entre libros de Español y Matemáticas de nivel básico, si la cantidad de libros de Español es el triple que la cantidad de libros de Matemáticas. ¿Cuántos libros de cada tipo hay en la biblioteca?
2. En una zapateria hay una promoción de calzados. Por 2 pares de botas y tres pares de zapatillas se paga $3000. Si el par de zapatillas vale $30 menos que el par de botas. ¿Cuánto cuesta el par de zapatillas y el par de botas?
3. El precio de 3 borradores y 5 libretas es $360. Si la libreta cuesta el triple de lo que cuesta un borrador. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
4. Se va a pintar el muro de una escuela que tienen forma rectangular y se necesita saber su superficie para estimar la cantidad de pintura que se ocupará. Si se sabe que el perímetro del muro mide 26 metros y que su base mide 7 metros más que su altura. ¿Cuál es el área del muro?

Ahora, reconsideremos el problema planteado en la introducción:

En la figura se muestran dos nadadores que están ubicados en los lados opuestos de una piscina cuya longitud es 50 metros. Si salen simultáneamente uno hacia el otro, nadando con rapidez constante por carriles paralelos, el primero a 6 m/s y el otro a 4 m/s. ¿En cuántos segundos y a qué distancia se cruzan los nadadores?



En el problema observa que si ambos nadadores se cruzan al cabo de t segundos a una distancia de x metros del lado a, mientras el primero ha recorrido x metros el segundo ha recorrido $50-x$ metros.

La velocidad es igual a la distancia recorrida sobre tiempo de recorrido, $v=\frac{d}{t}$, para el primer nadador $d=x$, o sea que $v=\frac{x}{t}$, de lo anterior tenemos que $x=vt$.

Como la velocidad del primer nadador es $6\frac{m}{s}$ entonces $x=6t$. Análogamente, para el segundo nadador $d=50-x$ y obtenemos la ecuación $50-x=4t$.

De lo anterior se pueden escribir entonces las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= 6t \\ 50-x &= 4t \end{aligned}$$

Y así obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolviendo el sistema tenemos que

$$\begin{aligned} 50-6t &= 4t \\ 10t &= 50 \\ t &= 5 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x &= 6(5) \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Lo cuál quiere decir que los nadadores se encuentra en un tiempo $t=5\text{ s}$ y a una distancia $x=30\text{ m}$ lado "a" de la piscina.

Cierre:

En este tema hemos hecho un repaso breve ecuaciones lineales con dos incógnitas y cómo se conforma un sistema de dos ecuaciones de este tipo con dos incógnitas. Así mismo, se presentaron los métodos de solución analítica de estos sistemas y se mostro su utilidad en el planteamiento y solución de algunos problemas de aplicación.

Aquí te presentamos un esquema que resume las formas en que se pueden resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

¿Cómo se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Gráficamente

Se representan las dos rectas en un mismo sistema de coordenadas y se determinan, con la mayor precisión posible, las coordenadas del punto de corte. Para esto se puede usar papel milimetrado o un software.

Analíticamente

Se usan métodos basados en manipulaciones algebraicas: igualación, sustitución o reducción, que permiten transformar las ecuaciones del sistema a una ecuación con una sóla incógnita.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t01_s01_descartes/TS_1_index.html

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b05_t03_s01_descartes/TS_1_index.html

http://www.yair.es/xms/algebra/sistemas/elementales/imagenes/elementales.swf

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Cuál de los siguientes problemas se resuelve con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x+2y&=65 \\ x&=3y \end{aligned}$$

A) ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 65 cm y que su base es el triple de su altura?

B) ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado si cada lado equivale a un cuarto de su área y esta es igual a 65?

C) ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo sabiendo que su largo es el doble de su ancho y que su área es igual a 65?

D) ¿Cuál es el área de un cuadrado sabiendo que cada lado equivale a $2x-1$ y que su perímetro es igual a 65?

2. Cuál de los siguientes problemas se resuelve con el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x&=4y \\ x+y&=70 \end{aligned}$$

A) Pancho es mayor que José por cuatro años, la suma de sus edades es 70 años. Calcular las edades.

B) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la edad de pancho es igual a la edad de José mas 70. Calcular las edades.

C) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la diferencia de sus edades es 70 años. Calcular las edades.

D) La edad de José es igual a cuatro veces la edad de Pancho, la suma de sus edades es 70 años. Calcular las edades.

3. Lee el siguiente problema:

El perímetro de un rectángulo mide 36 cm y la diferencia entre la base y la altura es de 8 cm. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema?

A) $\begin{aligned} x+y&=36 \\ x-y&=8 \end{aligned}$

C) $\begin{aligned} 2x+y&=36 \\ x-y&=8 \end{aligned}$

B) $\begin{aligned} x+y&=36 \\ \frac{x}{y}&=8 \end{aligned}$

D) $\begin{aligned} 2x+2y&=36 \\ x-y&=8 \end{aligned}$

4. El precio de 5 lápices y 7 bolígrafos es $155. Si un lápiz cuesta $5 menos que un lapicero. ¿Cuál es el precio de un lápiz?

A) 10

B) 12

C) 15

D) 16

5. El cajero de un cine sabe que en una sala hay 500 butacas ocupadas y que el total de dinero en caja por las entradas a esa sala es de $13000 Si cada adulto pagó $30 y cada niño pagó $20 por su entrada. ¿Cuántos adultos y cuantos niños hay en la sala?

A) 350 adultos y 150 niños

B) 300 adultos y 200 niños

C) 150 adultos y 350 niños

D) 200 adultos y 300 niños

TEMA 2. RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS RELACIONADAS CON UNA CIRCUNFERENCIA

Bloque I

Eje temático: Forma, espacio y medida

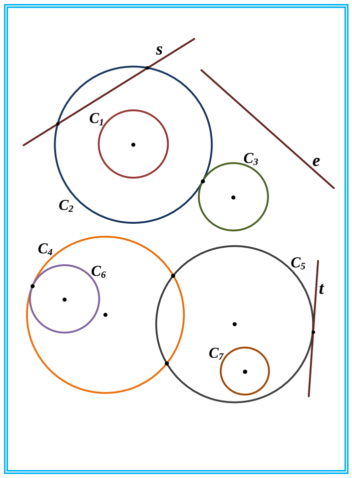
Tema: Formas geométricas

Subtema: Rectas y ángulos

Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas que implican relacionar ángulos inscritos y centrales de una circunferencia.

Resultado específico de aprendizaje:

Identifica las rectas y circunferencias que pueden relacionarse con una circunferencia de acuerdo con su posición relativa respecto de la circunferencia de referencia.



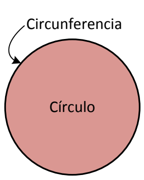
Introducción: En su clase de geometría, a Miguel le dejaron de tarea lo siguiente:

1. Trazar una circunferencia.
2. Trazar dos rectas tangentes a la circunferencia de manera que los puntos de tangencia sean los extremos de dos radios perpendiculares entre sí.

De acuerdo con las indicaciones dadas a Miguel, ¿cuál es la relación que existe entre ambas rectas tangentes?

Para responder la pregunta planteada es preciso notar que se hace referencia a uno de los distintos tipos de rectas que guardan cierta relación con una circunferencia, la **recta tangente**. Lo que necesitamos saber entonces son las características de las rectas tangentes a una circunferencia. A continuación describiremos las rectas y circunferencias que pueden relacionarse con una circunferencia de acuerdo con su posición relativa respecto de la circunferencia de referencia.

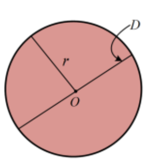
Desarrollo: Antes de describir las características de las rectas y circunferencias que pueden relacionarse con una circunferencia de acuerdo con su posición relativa respecto de la circunferencia de referencia recapitulemos algunos conceptos importantes respecto a la circunferencia.



*La **circunferencia** se define como una línea formada por todos los puntos de un plano que "equidistan" (están a la misma distancia) de un mismo punto llamado centro de la circunferencia. Así pues, estamos hablando de una línea cerrada.*

*El **círculo**, es justamente la región dentro del plano que se encuentra al interior de una circunferencia.*

Recuerda



*El **centro** de una circunferencia es el punto fijo de la cual "equidistan" todos los puntos de la circunferencia. Normalmente se denota con la letra O.*

*Se denomina **radio** al segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia. Se acostumbra a denotarlo con la letra r.*

*El **diámetro** es el segmento de recta que pasa por el centro de la circunferencia y tiene como extremos dos puntos de la circunferencia. Es comúnmente denotado por la letra D.*

Recuerda

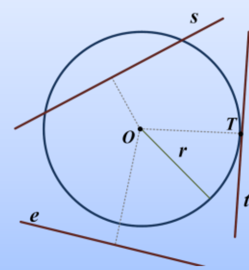
Rectas relacionadas con una circunferencia

Una recta en el plano puede tener una de estas posiciones con respecto a una circunferencia:

a) ***Recta secante***, cuando interseca a la circunferencia en dos puntos (recta s en la figura de la derecha).

b) ***Recta tangente***, cuando interseca en un solo punto con la circunferencia (recta t en la figura de la derecha). Al punto T en el que la tangente interseca a la circunferencia se llama punto de tangencia.

c) ***Recta exterior***, cuando no interseca o no posee algún punto en común con la circunferencia (recta e en la figura de la derecha).



De la figura anterior podemos notar que:

- La distancia que hay del centro O de la circunferencia a la recta secante s es menor que el radio r de la circunferencia.
- La distancia que hay del centro O de la circunferencia a la recta tangente t es igual al radio r de la circunferencia.
- La distancia que hay del centro O de la circunferencia a la recta exterior e es mayor que el radio r de la circunferencia.

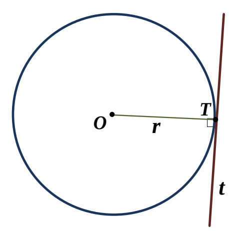
La distancia de un punto a una recta es la medida de la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

Dos rectas en el plano son perpendiculares si entre ellas forman un ángulo recto (de 90°).

Recuerda

Una propiedad característica de ***toda recta o segmento tangente a una circunferencia en un punto*** es que tal recta o segmento es ***perpendicular al radio que llega al punto de tangencia.***

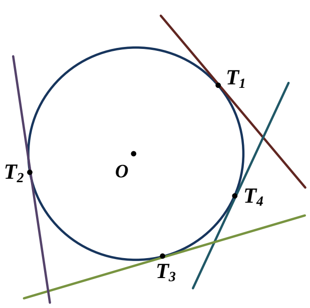
En la figura de la derecha, la recta t es tangente a la circunferencia en el punto T. Esto significa que el radio r es *perpendicular* a t en T. La razón de esta propiedad radica en que, si t es tangente a la circunferencia, la distancia más corta desde el centro O de la circunferencia a t viene dada justamente por la longitud del radio r.



Actividad

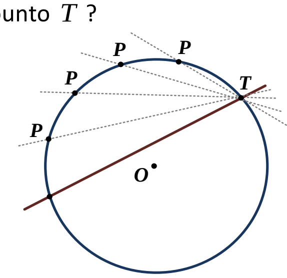
Realiza y responde lo que se indica en cada figura.

Se han trazado cuatro rectas tangentes a la circunferencia. Traza los radios que van de O a los puntos de tangencia T_1, T_2, T_3 y T_4 de las rectas tangentes mostradas. Mide con un trasportador los ángulos que se forman entre las rectas y los radios.



¿Cuánto miden esos ángulos?

Se ha trazado una recta secante que está fija en el punto T y se gira de manera que el punto P se vaya acercando al punto T. Traza los radios que van desde O hasta cada uno de los puntos P. ¿Qué pasa con la recta cuando el punto P coincide con el punto T?



¿Qué pasa con la medida del ángulo entre el radio y la recta secante conforme P se va acercando al punto T?

En general podemos decir que:

Toda recta que es perpendicular a un radio de una circunferencia en su punto extremo, es tangente a la circunferencia en ese punto.

Circunferencias relacionadas con una circunferencia

Dos circunferencias en el plano pueden tener una de estas posiciones relativas entre sí:

a) ***Circunferencias exteriores***, cuando la distancia entre los centros de ambas es mayor que la suma de sus radios respectivos.

b) ***Circunferencias tangentes exteriores***, cuando la distancia entre los centros de ambas es igual a la suma de sus radios respectivos.

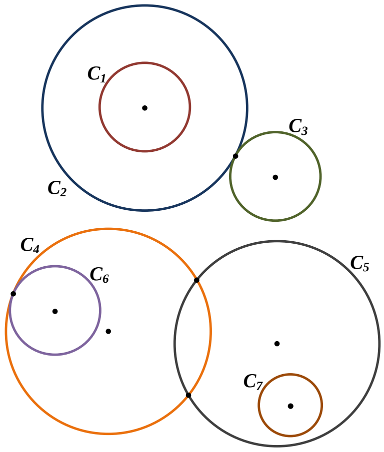
c) ***Circunferencias secantes***, cuando la distancia entre los centros de ambas es menor que la suma y mayor que la diferencia de sus radios respectivos.

d) ***Circunferencias tangentes interiores***, cuando la distancia entre los centros de ambas es igual a la diferencia de sus radios respectivos.

e) ***Circunferencias interiores***, cuando la distancia entre los centros de ambas es menor que la diferencia de sus radios respectivos.

f) ***Circunferencias concéntricas***, cuando ambas poseen el mismo centro, es decir, cuando la distancia entre los centros de ambas es nula.

En la figura de la derecha:



- C_2 y C_4, C_7 y C_4, C_5 y C_6, son ejemplos de pares de circunferencias exteriores.
- C2 y C3 son circunferencia tangentes exteriores.
- C4 y C5 son circunferencias secantes.
- C6 es una circunferencia tangente interior respecto de C4.
- C7 es una circunferencia interior respecto de C5.
- C1 y C2 son circunferencias concéntricas.

Mediante la siguiente actividad podrás comprobar los enunciados anteriores.

Actividad

En la figura de la página anterior se muestran varias circunferencias, con una regla realiza las medidas correspondientes y completa la siguiente tabla.

Tipo de circunferencias	Medidas	Condición que cumplen
Circunferencias exteriores	$r_{C_1} = 0.6$ cm, $r_{C_4} = 1.4$ cm, $d_{C_1C_4} = 3$ cm	$d_{C_1C_4} > r_{C_1} + r_{C_4}$ porque $3 \text{ cm} > 2 \text{ cm}$
Circunferencias tangentes exteriores		
Circunferencias secantes		
Circunferencias tangentes interiores		
Circunferencias interiores		
Circunferencias concéntricas		

Donde r se refiere al radio de una circunferencia y d a la distancia entre centros de dos circunferencias.

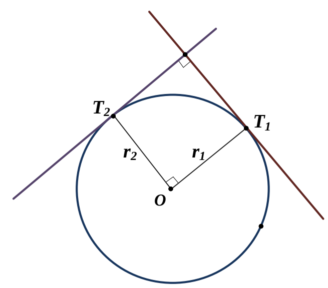
Retomemos ahora el problema planteado en la introducción:

En su clase de geometría, a Miguel le dejaron de tarea lo siguiente:

1. ***Trazar una circunferencia.***
2. ***Trazar dos rectas tangentes a la circunferencia de manera que los puntos de tangencia sean los extremos de dos radios perpendiculares entre sí.***

De acuerdo con las indicaciones dadas a Miguel, ¿cuál es la relación que existe entre ambas rectas tangentes?

En la figura de la derecha mostramos un posible desarrollo de lo que se pide.



Nota que cumple con la condición de que los puntos de tangencia T_1 y T_2 son los extremos de dos radios perpendiculares entre sí r_1 y r_2.

La relación que existe entre ambas rectas tangentes, como se observa, es que:

Ambas **son perpendiculares** ya que forman un ángulo recto en el punto en el que se intersecan y además puedes observar que una recta tangente es paralela al radio que se forma entre el centro O y el punto de tangencia de la otra recta tangente.

Cierre:

En este tema hemos hecho un repaso breve sobre las características de las rectas y circunferencias que pueden relacionarse con una circunferencia de acuerdo con su posición relativa respecto de la circunferencia de referencia.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b01_t03_s01_descartes/index.html

http://www.primaria.librosvivos.net/archivosCMS/3/3/16/usuarios/103294/9/6EP_Mat_cas_ud13_Posiciones_rectas_circunferencias/motorActividades.swf

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. ¿Cuál es la característica de una recta secante a una circunferencia?

A) Parte de un punto de la circunferencia a otro punto pasando por el centro.

B) Corta en dos puntos a la circunferencia.

C) Parte del centro de la circunferencia a un punto de la circunferencia.

D) Corta en un punto a la circunferencia.

2. Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia en los puntos extremos de un diámetro de la circunferencia, ¿cuál es la relación que existe entre ambas rectas tangentes?

A) Son de igual medida

B) Son la misma recta

C) Son paralelas

D) Son perpendiculares

3. Si dos rectas tangentes a una circunferencia son paralelas entre sí, ¿qué podemos decir acerca de los dos puntos de tangencia?

A) Su distancia es igual a una semicircunferencia.

B) Su distancia es igual al radio.

C) Su distancia es igual a π radios.

D) Su distancia es igual al diámetro.

4. Si dos circunferencias tienen radios de 12 cm y 7 cm y la distancia entre sus centros es de 5 cm ambas circunferencias son:

A) Tangentes interiores

B) Exteriores

C) Tangentes exteriores

D) Interiores

5. ¿Cuál es el mayor número de puntos de intersección que se pueden obtener al dibujar en el plano dos circunferencias y tres rectas?

A) 8

B) 9

C) 15

D) 17

TEMA 3. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Bloque II

Eje temático: Forma, espacio y medida

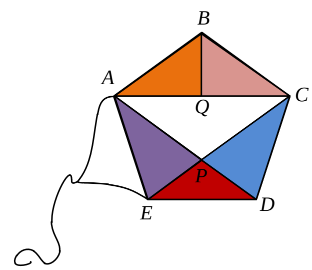
Tema: Formas geométricas

Subtema: Semejanza

Resultado general de aprendizaje: Resuelve problemas que implican utilizar las propiedades de la semejanza en triángulos y en general en cualquier figura.

Resultado específico de aprendizaje:

Aplica los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes polígonos regulares.



Introducción:

En la figura de la tabla de arriba se muestra una cometa pentagonal que Camila está construyendo para su clase de matemáticas. Como se observa, le falta elaborar y pegar el triángulo ΔACP. ¿Cuál será el área del triángulo faltante si sólo se sabe que el pentágono tiene lados de 30 cm y la longitud del segmento BQ es de 18 cm?

Observa que en el planteamiento anterior nos piden calcular el área de un triángulo del cual no conocemos ningún dato. Esto sería imposible si el triángulo no tuviera ninguna relación con el pentágono regular que forma la silueta de la cometa. A continuación te presentamos lo que es la semejanza de triángulos y cómo es que ésta nos sirve para analizar triángulos que están contenidos en polígonos regulares.

Desarrollo:

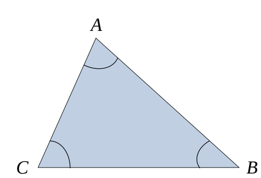
En matemáticas, cuando dos polígonos están "hechos a escala" se dice que son polígonos semejantes. A continuación nos enfocaremos a analizar la semejanza de un tipo de polígono muy especial, el triángulo.

En primer lugar definiremos lo que es la semejanza de triángulos y describiremos los criterios en los que nos podemos basar para determinar si dos triángulos son o no semejantes, finalmente mostraremos la utilidad de la semejanza de triángulos cuando analizamos diferentes polígonos regulares.

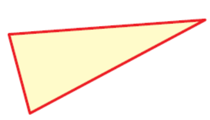
Recuerda

*El **triángulo** es un **polígono** determinado por **tres** segmentos de rectas denominados **lados** y **tres** puntos no alineados denominados **vértices**. Dos lados y un vértice determinan un ángulo interior del triángulo, para un total de **tres ángulos** interiores.*

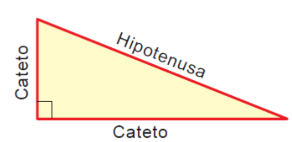
En la figura de la derecha, el triángulo ABC es determinado por los vértices A, B y C. En este caso los lados son los segmentos AB, BC y AC. Los ángulos del triángulo son los ángulos de los vértices A, B y C, es decir $\measuredangle CAB$, $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BAC$. El símbolo Δ representa la palabra triángulo. Así ΔABC se lee "el triángulo ABC".



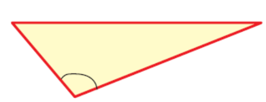
De acuerdo a sus ángulos, los triángulos se clasifican en:



Acutángulo: Tienen tres ángulos agudos (menores que 90°)

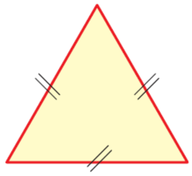


Rectángulo: Tienen un ángulo recto (90°)

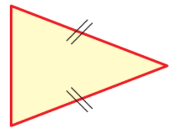


Obtusángulo: Tienen un ángulo obtuso (mayor que 90°)

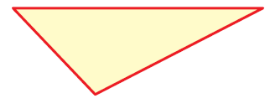
De acuerdo a sus lados, los triángulos se clasifican en:



Equilátero: Tienen tres lados iguales



Isósceles: Tienen dos lados iguales



Escaleno: Sus tres lados son desiguales

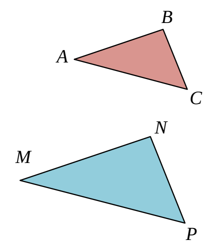
Triángulos semejantes

Dos **triángulos** son **semejantes** si poseen igual forma y diferente tamaño. Desde el punto de vista de sus elementos, la semejanza de dos triángulos significa que ***los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes y que los tres pares de lados correspondientes son proporcionales***.

Recuerda

Un par de lados correspondientes significa que un lado es de uno de los triángulos, y el otro, del segundo triángulo; y análogamente para los ángulos.

Así por ejemplo, al referirnos a los dos triángulos semejantes de la figura de la derecha al expresar $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ queremos decir que $\measuredangle A = \measuredangle M$, $\measuredangle B = \measuredangle N$, $\measuredangle C = \measuredangle P$ y que $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$.



Nota que utilizamos el símbolo $\sim$ para indicar la semejanza de dos triángulos.

Observa que

Si la **razón de proporcionalidad** entre los pares de lados correspondientes de dos triángulos es **igual a 1**, los dos triángulos resultan ser **congruentes**. En realidad, la congruencia de triángulos es un caso particular de la semejanza de triángulos.

Recuerda

Dos **triángulos** son **congruentes** si poseen igual forma y tamaño. Desde el punto de vista de sus elementos, la congruencia de dos triángulos significa que ***hay tres pares de lados correspondientes congruentes y tres pares de ángulos correspondientes congruentes***.

Criterios de semejanza de triángulos

Podemos establecer condiciones mínimas para asegurar que dos triángulos sean semejantes. Basta con que los dos triángulos *presenten* alguna de estas tres condiciones:

1. Dos pares de ángulos correspondientes son congruentes.
2. Un par de ángulos correspondientes congruentes, y proporcionales los dos pares correspondientes de lados que forman esos ángulos.
3. Los tres pares de lados proporcionales.

En algunos casos particulares de triángulos, las anteriores condiciones pueden reducirse todavía más. Por ejemplo, para que sean semejantes:

1. Dos triángulos **equiláteros**, no hace falta ninguna condición.
2. Dos triángulos **isósceles**, basta con que sean congruentes los ángulos opuestos a las respectivas “bases”.

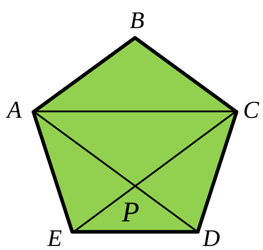
3. Dos triángulos **rectángulos**, basta con que sean proporcionales los dos pares de catetos correspondientes; o un par de catetos correspondientes y las hipotenusas; o que un par de ángulos agudos correspondientes sean congruentes.

Siempre es útil conocer los criterios para poder determinar si dos triángulos son semejantes, más allá de la simple inspección visual. Pero, además, determinar la semejanza de dos triángulos es una vía para poder establecer la congruencia de sus ángulos correspondientes, o la proporcionalidad de los segmentos correspondientes que forman sus lados.

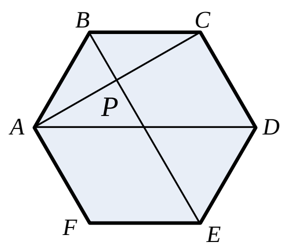
Polígonos regulares y semejanza de triángulos

Al trazar algunas diagonales en polígonos regulares podemos encontrar pares de triángulos semejantes o incluso congruentes. De esta forma, si conocemos algunas medidas de los polígonos, podemos conocer otras empleando la semejanza y congruencia de triángulos. Observa los siguientes tres polígonos en los cuales hemos trazado algunas de sus diagonales.

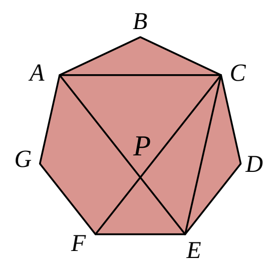
Pentágono



Hexágono



Heptágono

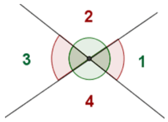


Pentágono

- Los triángulos ΔAPC y ΔEPD son ***semejantes*:**
  Nota que los ángulos $\measuredangle APC$ y $\measuredangle EPD$ son congruentes al ser un par de ángulos *opuestos por el vértice*, mientas que los ángulos $\measuredangle ACP$ y $\measuredangle DEP$ son congruentes al ser *alternos internos* entre las paralelas AC y ED. La semejanza se justifica entonces porque los triángulos tienen ***dos pares de ángulos correspondientes son congruentes.***
- Los triángulos ΔACE y ΔDAC son ***congruentes:***
  Nota que ambos son triángulos isósceles (puedes medir sus lados para comprobarlo) y se puede comprobar que los ángulos opuestos a las bases, $\measuredangle ACE$ y $\measuredangle DAC$, son congruentes. Con esto determinamos que son triángulos semejantes. Pero además, por una parte el lado AC es común a los dos triángulos, y por otra parte las bases de los triángulos son lados del pentágono (en ambos casos la razón de sus lados correspondientes es igual a 1). La congruencia se justifica entonces porque son ***triángulos isósceles con ángulos opuestos a las bases congruentes y la razón de un par de lados correspondientes iguales a 1.***

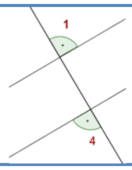
Hexágono

- Los triángulos ΔACD y ΔCPB son ***semejantes*.**
  Nota que ambos son triángulos rectángulos (puedes medir sus ángulos para comprobarlo) y los ángulos $\measuredangle CAD$ y $\measuredangle BCP$, son congruentes al ser un par de *ángulos alternos internos* entre las paralelas AD y BC. La semejanza se justifica entonces porque son ***triángulos rectángulos con un par de ángulos agudos congruentes.***
- Los triángulos ΔABP y ΔCPB son ***congruentes*.**
  Nota que los ángulos $\measuredangle ABP$ y $\measuredangle CBP$ son congruentes ya que la diagonal BE biseca (divide en dos partes iguales) al ángulo interior $\measuredangle ABC$ del hexágono y tienen un par de lados correspondientes iguales puesto que el lado BP es común a ambos triángulos, mientras que los lados AB y BC son lados del hexágono (en ambos casos la razón de sus lados correspondientes es igual a 1). La congruencia se justifica entonces porque los triángulos tienen ***un par de ángulos correspondientes congruentes, y congruentes los dos pares correspondientes de lados que forman esos ángulos***.



Los ***ángulos opuestos por el vértice*** *son ángulos que teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro. En la figura el ángulo 1 es igual al ángulo 3 y el ángulo 2 es igual al ángulo 4.*

Recuerda



Si una recta transversal corta a dos rectas paralelas, los ***ángulos alternos externos*** *son los que están en la parte exterior de las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal. En la figura, los ángulos 1 y 4 son iguales.*

Recuerda

Actividad

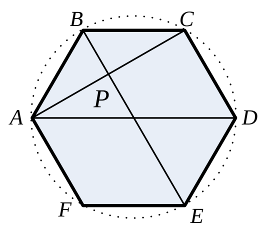
Para el caso del heptágono de la figura de la página anterior, demuestra que:

- Los triángulos ΔACP y ΔFEP son *semejantes.*
- Los triángulos ΔABC y ΔCDE son *congruentes*.

Vamos a desarrollar un par de ejemplos para mostrar la utilidad de la semejanza de triángulos en el análisis de polígonos regulares.

Ejemplo 1:

Si el hexágono regular de la derecha tiene lados de 8 cm, ¿cuánto mide el segmento BP ?



Observa que los triángulos ΔACD y ΔCPB son semejantes. Si nos fijamos en el triángulo más grande sabemos que $AD = 16\text{ cm}$ (puesto que es igual a dos radios de una circunferencia circunscrita al hexágono, y cada radio mide lo mismo que un lado), mientras que el lado $CD = 8\text{ cm}$ al ser a su vez uno de los lados del hexágono.

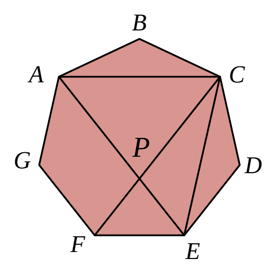
Por otra parte, en el triángulo menor, lado $BC = 8\text{ cm}$ pues también es uno de los lados del hexágono. Con estos datos podemos formar la proporción $\frac{BP}{CD} = \frac{BC}{AD}$, por lo que al sustituir nuestros datos tenemos que

$$\frac{BP}{8\text{ cm}} = \frac{8\text{ cm}}{16\text{ cm}}$$

$$BP = \frac{8\text{ cm} \times 8\text{ cm}}{16\text{ cm}} = 4\text{ cm}$$

Ejemplo 2:

Si el heptágono regular tiene lados de 9 cm y los segmentos AC y AP miden 16.2 cm y 13 cm, respectivamente, ¿cuánto mide el segmento PE ?



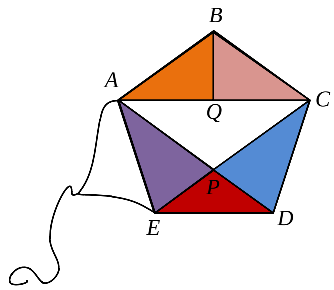
Observa que los triángulos ΔAPC y ΔEPF son semejantes y que el lado FE del triángulo menor es igual a 9cm por ser a la vez uno de los lados del heptágono. Con estos datos podemos formar la proporción $\frac{PE}{AP} = \frac{FE}{AC}$, por lo que al sustituir nuestros datos tenemos que

$$\frac{PE}{13\text{ cm}} = \frac{8\text{ cm}}{16.2\text{ cm}}$$

$$PE = \frac{13\text{ cm} \times 9\text{ cm}}{16.2\text{ cm}} = 7.2\text{ cm}$$

Reconsideremos ahora el problema planteado en la introducción:

En la figura se muestra una cometa pentagonal que Camila está construyendo. Como se observa, le falta elaborar y pegar el triángulo ΔACP. ¿Cuál será el área del triángulo faltante si sólo se sabe que el pentágono tiene lados de 30 cm y la longitud del segmento BQ es de 18 cm?



Se sabe que en un pentágono dos diagonales que concurren en un vértice trisecan el ángulo interior correspondiente. De esta forma podemos decir que los triángulos ΔABC y ΔAPC son semejantes en primera instancia ya que presenta un par de ángulos correspondientes iguales ($\measuredangle PCA$ con $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle PAC$ con $\measuredangle BAC$).

Pero como ambos triángulos tienen el lado AC común, concluimos que los triángulos ΔABC y ΔAPC son congruentes, por lo que tienen igual área.

Con los datos calculamos el área del triángulo ΔABC , calculando previamente su altura QC a través del Teorema de Pitágoras, como se muestra a continuación

$$(BC)^2 = (BQ)^2 + (QC)^2$$
$$30^2 = 18^2 + (QC)^2$$
$$QC = \sqrt{30^2 - 18^2}$$
$$QC = 24 \text{ cm}$$

De aquí que la base del triángulo ΔABC es $AC = 2QC = 2 \times 24 = 48 \text{ cm}$ y el área se calcula como

$$A_{\Delta ACP} = A_{\Delta ABC} = \frac{AC \times BQ}{2} = \frac{48 \text{ cm} \times 18 \text{ cm}}{2} = 432 \text{ cm}^2$$

Cierre:

En este tema hemos hecho un repaso breve sobre la semejanza de triángulos y los criterios en los que nos podemos basar para determinar si dos triángulos son o no semejantes. También mostramos la utilidad de la semejanza de triángulos cuando analizamos diferentes polígonos regulares.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b02_t04_s01_descartes/index.html

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/semejanza/swf/criterios.swf

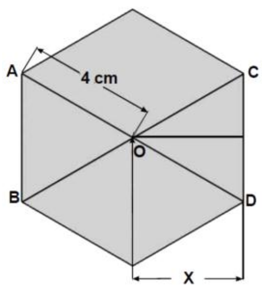
http://odas.educarchile.cl/odas_mineduc/pav/Matematicas/triang_mellizos_final.swf

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. La siguiente figura es un hexágono regular, por lo cual los triángulos ΔAOB y ΔCOD son congruentes.



¿Cuál es el valor de x en cm?

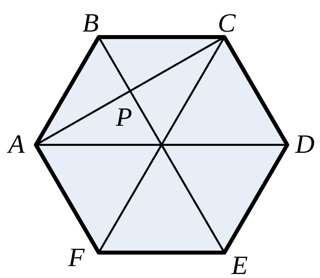
A) $\sqrt{6}$

B) $\sqrt{8}$

C) $\sqrt{12}$

D) $\sqrt{20}$

2. Si el hexágono regular mostrado tiene lados de 8 cm, ¿cuántos centímetros mide el segmento BP? Observa que el segmento FC pasa por el centro del hexágono.



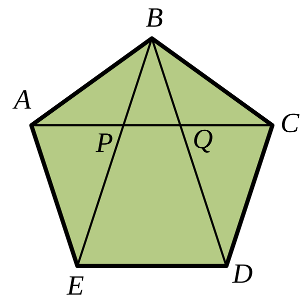
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

3. Si el pentágono mostrado tiene lados de 10 cm y los segmentos BD y BQ miden 16.2 cm y 6.2 cm, respectivamente, ¿cuántos centímetros mide el segmento PQ? (3.8)



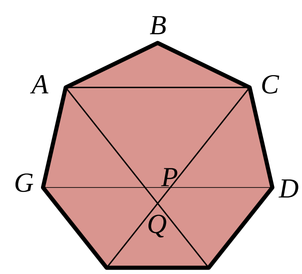
A) 3.2

B) 3.8

C) 4.2

D) 4.8

5. Si el pentágono mostrado tiene lados de 12 cm y el segmento QE miden 9.6 cm, ¿cuántos centímetros mide el segmento GP?



A) 8

B) 9

C) 12

D) 15

TEMA 4. SITUACIONES ALEATORIAS

Bloque II

Eje temático: Manejo de la información

Tema: Análisis de la información

Subtema: Noción de probabilidad

Resultado general de aprendizaje: Utiliza la simulación para resolver situaciones probabilísticas.

Resultado específico de aprendizaje:

Resuelve problemas que impliquen utilizar la simulación en situaciones probabilísticas.

Introducción:

Andrea ganó el concurso de conocimientos en su escuela, por ello la directora ha decidido obsequiarle un libro. La directora depositó en una caja papelitos con los títulos de 6 libros de español, 4 libros de matemáticas y 2 libros de geografía, para que Andrea extraiga uno y se lleve a su casa el libro correspondiente. ¿Cuál es la probabilidad de que Andrea se gane un libro de matemáticas o español?

En este tema aprenderás a resolver situaciones de la vida cotidiana en donde interviene el **azar,** calculando la probabilidad de que suceda un evento derivado de una situación de **simulación**.

Desarrollo:

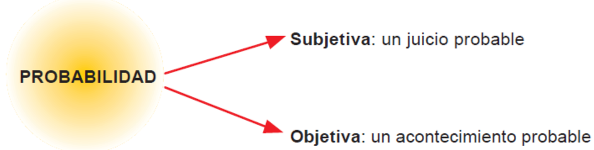
A continuación te presentamos la manera en que se resuelven algunos problemas en donde interviene el azar, para lo cual repasaremos algunos conceptos de **probabilidad**. Describiremos algunas simulaciones de situaciones aleatorias y mostraremos la forma en que se puede calcular la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos deseados y la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos eventos distintos.

Probabilidad

En la Antigüedad se denominaba *probable* a lo que según las apariencias puede ser declarado verdadero o cierto. Por lo que la probabilidad posee grados según su acercamiento o alejamiento de la certidumbre (certeza).

La idea de probabilidad y azar dieron origen al cálculo de probabilidades como disciplina de carácter matemático. Esto permitió dar un valor numérico a la probabilidad de ocurrencia o no ocurrencia de un acontecimiento o resultado (probabilidad objetiva), el cual se mide por la relación entre el número de casos favorables para un acontecimiento cualquiera (evento) y el número posible de acontecimientos, admitiendo que todos los casos son igualmente probables.

Si existe poca o ninguna experiencia anterior o información sobre la cual nos basemos para establecer la probabilidad de un evento, podemos llegar a ella en forma subjetiva. Esto significa que un individuo evalúa las opiniones disponibles y después estima o asigna la probabilidad. Esta probabilidad se conoce como probabilidad subjetiva.



La **Probabilidad,** es la rama de las matemáticas que mide la frecuencia con la que se obtiene un conjunto de resultados al realizar un *experimento aleatorio*, del cual se conocen todos los resultados posibles bajo condiciones estables. La Probabilidad toma valores entre 0 y 1, entre mayor sea el número en ese intervalo es más probable de que el evento ocurra.

La **probabilidad frecuencial** es un valor que se obtiene de la experiencia de algún fenómeno o experimento aleatorio que permite estimar a futuro cierto comportamiento. Es importante saber interpretar bien los resultados que se obtienen, pues no se tiene un comportamiento definitivo.

*Los fenómenos o **experimentos aleatorios** son los que dependen de la "suerte" o "azar", es decir son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de estos va a ser observado en la realización del experimento a pesar de haberlo realizado en similares condiciones. A la colección de resultados que se obtiene en los experimentos aleatorios se le llama **espacio muestral**.*

Recuerda

Si designamos con la letra A a un evento, la probabilidad frecuencial de ese evento se denota por $P(A)$ y se calcula dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número total de veces que se realizó el experimento.

$$P(A)=\frac{\text{número de veces que ocurre el evento}}{\text{numero de veces que se realiza el experimento}}$$

También podemos obtener un valor sobre la probabilidad de un evento A sin necesidad de realizar experimentos como en la probabilidad frecuencial, se trata de la **probabilidad clásica** y ésta se basa en la suposición de que los resultados de un experimento son igualmente posibles. Si designamos a $P(e)$ como el valor de la probabilidad de que ocurra un evento, entonces tenemos que

$$P(e)=\frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados}}$$

Cuando se habla de probabilidad clásica se acostumbra solamente usar el término probabilidad.

Simulación de situaciones aleatorias

Cundo hablamos de **simulación** nos referimos a que, para un problema de tipo aleatorio real (de la vida cotidiana), se diseña otra situación aleatoria en la cual los eventos tienen la misma probabilidad clásica de ocurrir que los del problema original. Se tiene la ventaja de que en la simulación se pueden observar los resultados para luego calcular los valores de la probabilidad frecuencial y utilizar estos valores para obtener información sobre el problema original.

Para poder diseñar una simulación se puede utilizar algún tipo de material u objeto manipulable, por ejemplo dados, monedas, urnas, tablas de números aleatorios, etcétera.

Lo que aquí te vamos a presentar es la forma en que se calculan las probabilidades de eventos a partir de una situación de simulación sin desarrollarla, apoyándonos de la probabilidad clásica. Para ello, considera la siguiente situación.

Para el próximo día del niño en una escuela se van a obsequiar tres tipos distintos de regalos a todos los alumnos de una escuela. Los regalos son un tangram, un geoplano y un cubo de Rubik y se dará prioridad a que los alumnos de cada grupo con las mejores calificaciones seleccionen aleatoriamente su regalo.

Pepe, que es el mejor de su clase, sabe que se cuenta con el mismo número de unidades de cada uno de estos regalos para su grupo, que en total es de 33 alumnos y como a él le interesa ganarse un geoplano o un tangram decide realizar una simulación de lo que posiblemente suceda cuando le toque seleccionar su regalo.

Lo que Pepe hizo fue meter en una caja 33 papelitos con el nombre de cada uno de los tres regalos, 11 decían "tangram", 11 decía "geoplano" y 11 decían "cubo de Rubik".

Reprodujo 100 veces el experimento de sacar al azar un papelito y registró las frecuencias (con una línea inclinada por cada vez) de cada tipo de regalo. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Evento	Descripción	Frecuencia
T	Sacar un papelito de Tangram	///// ///// ///// // = 32 ///// ///// /////
G	Sacar un papelito de Geoplano	///// ///// ///// //// = 34 ///// ///// /////
C	Sacar un papelito de Cubo de Rubik	///// ///// ///// //// = 34 ///// ///// /////

¿Cómo puede con estos resultados Pepe determinar la probabilidad de seleccionar un tangram o un geoplano?

La *probabilidad frecuencial* de cada uno de los eventos A y B es:

$$P(T)=\frac{\text{veces que ocurre el evento } T}{\text{veces que se realiza el experimento}}=\frac{32}{100} \qquad P(G)=\frac{\text{veces que ocurre el evento G}}{\text{veces que se realiza el experimento}}=\frac{34}{100}$$

La probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B se obtiene de sumar las probabilidades individuales de cada evento, de manera que

$$P(T)+P(G)=\frac{32}{100}+\frac{34}{100}=\frac{66}{100}=0.66$$

Por lo cual concluimos que Pepe tiene una probabilidad de 0.66 de seleccionar un tangram o un geoplano.

Probabilidad clásica y la simulación

Por medio de la *probabilidad clásica* podemos determinar esta probabilidad, sin necesidad de repetir 60 veces el experimento que hizo Pepe, de la siguiente manera:

Determinamos la razón del número de papelitos de cada tipo de regalo con el número de papelitos que hay en total como $\frac{11}{33}=\frac{1}{3}$. Este valor corresponde a la *probabilidad clásica* de que Pepe seleccione algún tipo específico de regalo, es decir

$$P(T)=\frac{1}{3} \qquad P(G)=\frac{1}{3} \qquad P(C)=\frac{1}{3}$$

De manera que si queremos saber la probabilidad del evento A o el evento B sumamos

$$P(T)+P(G)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.667$$

Lo cual es un resultado muy similar al que obtuvimos anteriormente. Nota que, con saber que cada evento tiene la misma probabilidad, podemos generar otra situación de simulación más sencilla que nos represente la situación real, por ejemplo, meter en una bolsa tres pelotas de distintos colores y extraer una bola.

¿Qué sucede si en lugar de ser el mismo número de regalos de cada tipo se tuvieran, por ejemplo, 11 tangram, 13 geoplanos y 9 juegos de geometría?

En este caso, la probabilidad de cada uno de los eventos sería distinta de manera que

$$P(T)=\frac{11}{33} \qquad P(G)=\frac{13}{33} \qquad P(C)=\frac{9}{33}$$

Entonces, si queremos saber la probabilidad del evento A o el evento B sumamos

$$P(T)+P(G)=\frac{11}{33}+\frac{13}{33}=\frac{24}{33}=0.723$$

Por lo cual concluimos que Pepe tendría una probabilidad de 0.723 de seleccionar un tangram o un geoplano. En general podemos decir que

En una situación de simulación, la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos es igual a la **suma de las probabilidades de cada uno de los eventos**.

Probabilidad en dos eventos simultáneos

Continuando con una situación similar a la planteada pensemos en que en lugar de obsequiar un regalo a los niños se les obsequiarán 2 regalos y que sigue habiendo las misma unidades de los 3 tipos distintos de regalos. De esta manera, para el salón de pepe se tendría 66 regalos en total, 22 tangram, 22 geoplanos y 2 juegos de geometría.

Para repartir los regalos, la maestra metió, en dos bolsas, 3 pelotas de distinto color y solicita a Pepe que extraiga simultáneamente una bola de cada bolsa para determinar cuáles serían sus regalos.

Si la asignación de los colores de las pelotas es

T = Pelota verde = Tangram G = Pelota azul = Geoplano C = Pelota Roja = Cubo de Rubik

¿Cuál es la probabilidad de que Pepe se gane un tangram y un geoplano?

Para representar esta situación hacemos la siguiente tabla:

1	T	T	2	T	G	3	T	C
4	G	V	5	G	G	6	G	C
7	C	V	8	C	G	9	R	C

En esta tabla se muestran las posibles combinaciones que existen al extraer, de cada bolsa, una pelota de cualquiera de los tres distintos colores. Observa entonces que, la combinación 9, es la que corresponde a extraer un tangram y un geoplano. De lo anterior vemos que tenemos 1 de 9 combinaciones que coinciden con el evento deseado, por los que decimos que $P(TG)=\frac{1}{9}$

Sabemos que $P(T)=\frac{1}{3}$ y $P(G)=\frac{1}{3}$ y hemos determinado que $P(TG)=\frac{1}{9}$, podemos concluir que entonces que

$$P(TG)=P(T)\times P(G)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

En general podemos decir que

En una situación de simulación, la probabilidad de que ocurran dos eventos simultáneos es igual al **producto de las probabilidades de cada uno de los eventos.**

Actividad

Responde lo que se indica en cada una de las siguientes situaciones.

1. Sobre una mesa se encuentra un frasco con doce caramelos negros, ocho rojos, diez amarillos y cinco verdes. Tomas un caramelo sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que saques un caramelo de color negro o amarillo?

2. Si se lanza un dado en forma de dodecaedro regular (con 12 caras iguales en forma de pentágono) cuyas caras están numeradas con del 1 al 12, ¿qué probabilidad hay de que salga un número que sea múltiplo de 5 o múltiplo de 3 (incluyéndolos)?

3. Se lanzan dos dados de seis caras simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par y un 5?

Antes de finalizar el tema, daremos respuesta a la situación planteada en la introducción:

Andrea ganó el concurso de conocimientos en su escuela, por ello la directora ha decidido obsequiarle un libro. La directora depositó en una caja papelitos con los títulos de 6 libros de español, 4 libros de matemáticas y 2 libros de geografía, para que Andrea extraiga uno y se lleve a su casa el libro correspondiente. ¿Cuál es la probabilidad de que Andrea se gane un libro de matemáticas o español?

Sea $P(E)=\frac{6}{12}$ la probabilidad de sacar un libro de español, $P(M)=\frac{4}{12}$ la probabilidad de sacar un libro de matemáticas y $P(G)=\frac{2}{12}$ la probabilidad de sacar un libro de geografía, tenemos que

$$P(E)+P(M)=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}=\frac{10}{12}=0.83$$

Cierre:

En este tema aprendiste a resolver situaciones de la vida cotidiana en donde interviene el **azar,** calculando la probabilidad de que suceda un evento derivado de una situación de **simulación**. Para ello te presentamos algunos conceptos de **probabilidad** y describimos algunas simulaciones de situaciones aleatorias, mostrando la forma en que se puede calcular la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos deseados y la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos eventos distintos.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html

http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b02_t06_s01_descartes/index.html

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 bolas blancas y 6 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca?

A) $\frac{1}{15}$

B) $\frac{1}{9}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{4}{5}$

2. En una caja con dulces hay 9 chocolates, 5 tamarindos y 7 chicles de la misma forma, peso y envoltura. Si sacas un dulce, ¿qué probabilidad hay de que no te toque un chocolate?

A) $\frac{4}{7}$

B) $\frac{2}{9}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{4}{5}$

3. Tenemos dos urnas que contienen cada una bola roja, una azul y una verde, cada una. Si sacamos simultáneamente una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que saquemos dos bolas del mismo color?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{6}$

4. Si se lanza una moneda y un dado numerado de seis caras simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 3 y un “águila”?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{6}$

5. Se lanzan dos dados de seis caras simultáneamente, si las caras de los dados están numeradas del 1 al 6, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número par en el primero y un número mayor que 2 en el segundo?

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{4}{9}$

TEMA 5. CORTES EN ESFERAS Y CONOS

Bloque V

Eje temático: Forma, espacio y medida

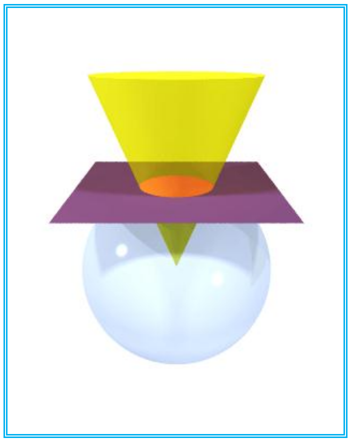
Tema: Formas geométricas

Subtema: Cuerpos geométricos

Resultado general de aprendizaje: Anticipa cómo cambia el volumen de esferas, cilindros y conos al aumentar o disminuir alguna de sus dimensiones.

Resultado específico de aprendizaje:

Determina la variación que se da en el radio de los diversos círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en una esfera o cono recto.



Introducción:

En una tienda de manualidades se están elaborando unos muñecos con cabezas de unicel en forma de esferas de 15 cm de diámetro. Para colocarles un sombrero, se debe hacer un corte a las esferas de manera que el círculo que se forme en la unión con el sombrero tenga un radio de 3.5 cm. ¿A qué distancia desde el centro de la circunferencia se hace el corte?

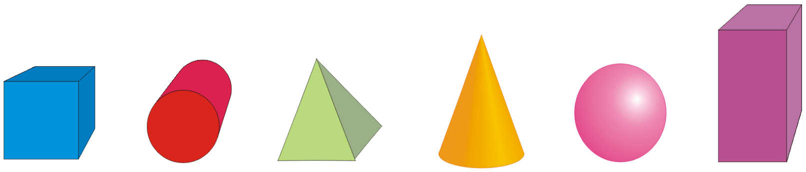
Si observas la situación anterior notarás que se refiere a un cuerpo geométrico que es muy conocido, la esfera. En este tema revisaremos algunos aspectos relacionados con dos de los cuerpos geométricos que se encuentran dentro de los llamados "cuerpos redondos", nos referimos a la esfera y al cono. Particularmente, analizaremos qué es lo que sucede cuando realizamos algunos cortes a estos cuerpos geométricos.

Desarrollo:

Todo lo que percibimos son objetos de tres dimensiones; todos los seres y objetos de la naturaleza y todos los artefactos elaborados en las distintas culturas, son tridimensionales pues ocupan un lugar en el espacio físico.

Recuerda

*Los **cuerpos geométricos** son objetos tridimensionales que tienen ciertas particularidades, ciertas formas más sencillas, más elementales, más regulares; por ejemplo, los que presentan caras externas constituidas por polígonos o círculos, o los que tienen una forma parcial o totalmente redonda. En este grupo quedan los objetos que tienen la apariencia de cajas, pirámides, prismas, cilindros, **conos, esferas**, etc.*



Clasificación de los cuerpos geométricos

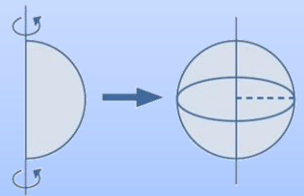
Un criterio básico para clasificar los cuerpos geométricos se refiere a la *naturaleza de sus caras exteriores*. De esta forma tenemos:

- Los ***poliedros*** (poliedro = polus [mucho]+ hedra [cara] = muchas caras) son cuerpos geométricos limitados por un número finito de **polígonos.** Estos polígonos reciben el nombre de *caras* del poliedro, a la intersección de dos caras se le conoce como *arista* y al punto de intersección de más de dos caras como *vértice*.

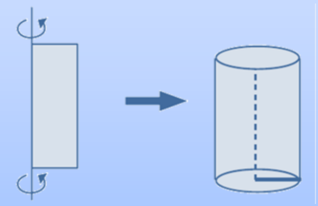
- Los ***cuerpos redondos*** o ***sólidos de revolución***, cuerpos geométricos formados por la revolución completa de una figura plana (llamada generatriz) alrededor de un eje de giro.

Los sólidos de revolución se clasifican, precisamente, tomando en cuenta la figura plana que rota una vuelta completa y el eje alrededor del cual se produce la rotación. Así, los más conocidos son:

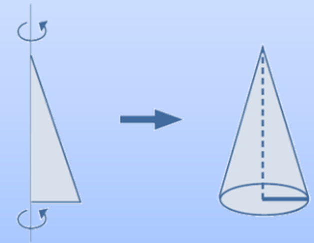
La esfera, generada por la rotación de un *semicírculo* alrededor de su diámetro.



El cilindro, generado por la rotación de un *rectángulo* alrededor de un lado.



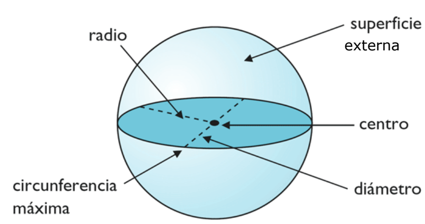
El cono, generado por la rotación de un *triángulo rectángulo* alrededor de un cateto.



En este tema sólo estudiaremos algunas características de las esferas y los conos.

Elementos de una esfera

El *centro* de la esfera es el punto que equidista de cualquier punto de la *superficie esférica* (superficie externa de la esfera).

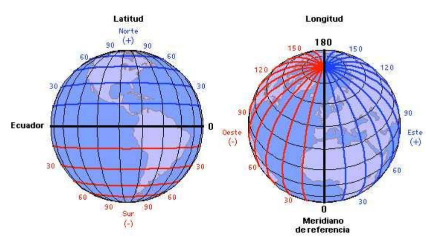


Un *radio* de la esfera es un segmento que une el centro con cualquier punto de la superficie esférica.

Un *diámetro* es un segmento que une dos puntos de la superficie esférica y pasa por el centro de la esfera.

También sobre la superficie esférica pueden considerarse *circunferencias máximas*, caracterizadas porque su radio es el radio de la esfera; análogamente, pueden dibujarse circunferencias de radio menor al de la esfera.

En el caso de la Tierra, considerada como una esfera, los *meridianos* y la *línea del ecuador* son ejemplos de circunferencias máximas; los paralelos (por ejemplo, los de los trópicos, o los de los círculos polares) son circunferencias menores.



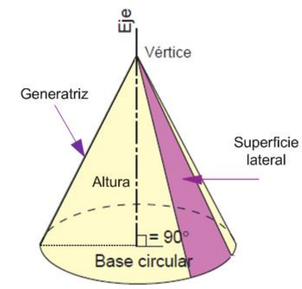
Un *diámetro* es un segmento que une dos puntos de la superficie esférica y pasa por el centro de la esfera.

Elementos de un cono

La *generatriz* del cono es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyo giro alrededor de uno de sus catetos genera el cono.

La *altura* del cono es la distancia del vértice a la base y su longitud coincide con la del cateto que sirve de eje de giro para generar el cono.

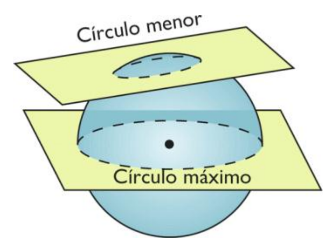
La *base* está formada por un solo círculo, con su radio y diámetro correspondientes.



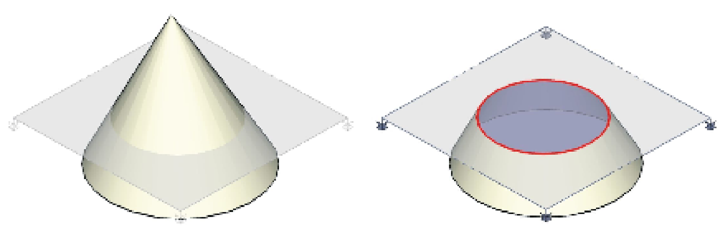
La superficie lateral del cono se denomina *superficie cónica de revolución*; extendida sobre un plano, tiene la forma de un sector circular.

Cortes en circunferencias y conos

El corte o intersección de un plano con una esfera determina una circunferencia. Esta es una propiedad característica de la esfera. Si el plano pasa por el centro de la esfera, resulta una *circunferencia máxima* (su radio es igual al radio de la esfera). Al considerar la esfera sólida y el corte con un plano se obtiene el círculo. Si el plano pasa por el centro, resulta un *círculo máximo*, de lo contrario se dice que es un círculo menor.



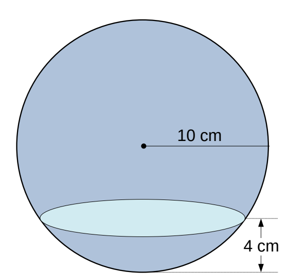
Al cortar un cono recto con un plano paralelo a la base (esto es, perpendicular al eje), resulta un círculo. El sólido obtenido al quitar la parte que contiene al vértice es un *cono truncado* o *tronco de cono*.



A continuación desarrollaremos un par de ejemplos en los que mostramos la relación que existe entre el radio de una esfera y los radios de los círculos que se forman al realizar algún corte, así como la relación entre el radio de la base de un cono y los círculos que se forman al hacer algún corte horizontal.

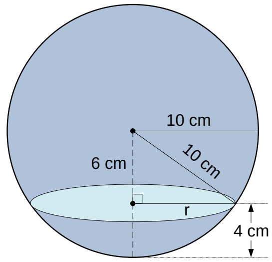
Ejemplo 1:

Se tienen una esfera de unicel de 10 cm de radio a la cuál se le va a hacer un corte a una altura de 4 cm, como se muestra en la figura de la derecha. ¿Cuál será el área del círculo que se forma al hacer el corte?



Para ilustrar mejor esta situación se hacen mas abajo algunos trazos sobre la figura, de manera que podamos visualizar una estrategia para encontrar lo que se pide.

Observa que se ha formado un triángulo rectángulo cuya *hipotenusa* mide 10 cm, ya que es igual al radio de la esfera. El cateto vertical mide 6 cm puesto que resulta de la diferencia entre el radio de la esfera y la altura a la que se hizo el corte $10\text{ cm} - 4\text{ cm} = 6\text{ cm}$, mientras que el cateto horizontal es el radio r del círculo que se forma al hacer el corte.



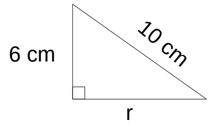
Si encontramos el valor del radio r, estaremos en posibilidad de calcular el área del círculo que se forma al hacer el corte. Para ello debemos emplear el *Teorema de Pitágoras* para resolver el triángulo rectángulo formado.

Teorema de Pitágoras **Recuerda**

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b, y la medida de la hipotenusa es c, se establece que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Al aplicar en nuestro triángulo rectángulo el Teorema de Pitágoras tenemos que:



$$10^2 = 6^r + r^2$$
$$r^2 = 10^2 - 6^2$$
$$r = \sqrt{64}$$
$$r = 8\text{ cm}$$

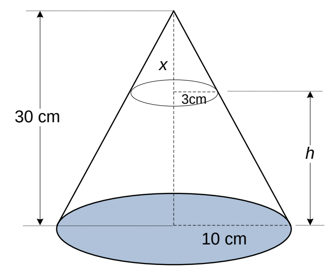
Entonces el área del círculo que se forma al hacer el corte a la esfera es:

$$A = \pi r^2 = \pi(8\text{ cm})^2 = 201\, cm^2$$

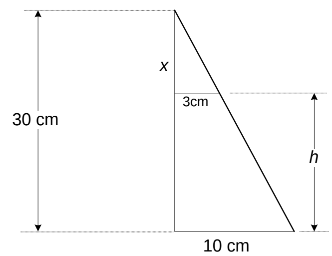
Observa bien que los **radios de los círculos que se forman al hacer cortes a una esfera se relacionan con el radio de la esfera mediante el Teorema de Pitágoras**. Es importante que tengas bien presente esto pues los triángulos rectángulos que se forman te ayudarán a resolver una gran variedad de problemas.

Ejemplo 2:

Se desea formar un cono truncado a partir de un cono recto de altura igual a 30 cm y una base cuyo radio mide 10 cm. Si se requiere que el círculo superior del cono truncado tenga un radio de 3 cm, ¿a qué altura h se debe hacer el corte desde la base?



Observa la figura de la derecha en la cuál se ha ilustrado el problema. Si extraemos el par de triángulos que se forman, podremos ver que son semejantes por tener dos ángulos iguales.



Empleando la semejanza de triángulos podemos encontrar entonces el valor de x al formar la proporción

$$\frac{x}{30} = \frac{3}{10} \quad ; \quad x = \frac{30 \times 3}{10} = 9\text{ cm}$$

y con esto, calculamos el valor de la altura a la cuál se debe hacer el corte al cono como:

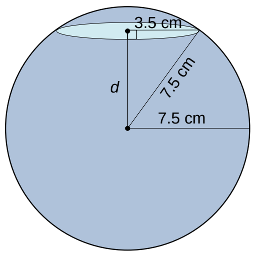
$$h = 30 \text{ cm} - x$$
$$h = 30 \text{ cm} - 9 \text{ cm}$$
$$h = 21 \text{ cm}$$

Observa bien que **los radios de los círculos que se forman al hacer cortes a un cono se relacionan con el radio de la base del cono mediante la Proporcionalidad de Triángulos**. Es importante que tengas bien presente esto pues los triángulos proporcionales que se forman te ayudarán a resolver una gran variedad de problemas.

Ahora, vamos a resolver el problema planteado en la introducción:

En una tienda de manualidades se están elaborando unos muñecos con cabezas de unicel en forma de esferas de 15 cm de diámetro. Para colocarles un sombrero, se debe hacer un corte a las esferas de manera que el círculo que se forme en la unión con el sombrero tenga un radio de 3.5 cm. ¿A qué distancia desde el centro de la circunferencia se hace el corte?

En primer lugar, nota que nos dan el diámetro y no el radio de la circunferencia. Observa la figura de la derecha en la cuál se ha ilustrado el problema. Nota que se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio de la esfera, el cateto horizontal es el radio del círculo que se forma al hacer el corte y el cateto vertical es la distancia d que calculamos como:



$$7.5^2 = 3.5^2 + d^2$$
$$d^2 = 7.5^2 - 3.5^2$$
$$d = \sqrt{44} = 6.6 \text{ cm}$$

Actividad

Realiza lo que a continuación se indica.

1. Se tienen un cono cuya altura es de 30 cm. Si se hace un corte paralelo a la base del cono, a una distancia de 24 cm de la base y el círculo que se forma tiene 5 cm de radio, ¿cuál es radio de la base del cono?

2. Se hacen cortes a una esfera de 20 cm de diámetro a una altura de 8cm, 6 cm y 4 cm. ¿cuánto miden de radio los círculos que se forman al hacer los cortes?

Cierre:

En este tema revisamos algunos aspectos relacionados con dos de los cuerpos geométricos que se encuentran dentro de los llamados “cuerpos redondos”, la esfera y al cono. Así mismo, desarrollamos algunos ejemplos relacionados con la generación de círculos al hacer cortes en estos cuerpos geométricos.

Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t02_s01_descartes/index.html

http://www.cuadernosdigitalesvindel.com/juegos/volumen.swf

Evaluación: Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la respuesta correcta de la situación planteada.

1. Un pequeño cono ha sido cortado de la punta de otro más grande. Si el cono que se cortó tienen un diámetro de 10 cm y una altura de 9 cm y se sabe que la altura del cono original era de 27 cm, ¿cuánto mide la base del cono original?

A) 12

B) 15

C) 18

D) 21

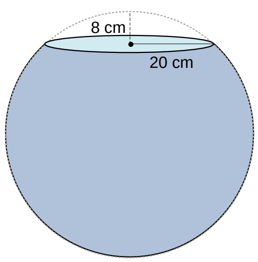
2. La figura muestra una pecera cuya “boca” esta formada por una circunferencia de radio igual a 20 cm, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el radio de la esfera que forma la pecera?

A) 21

B) 27

C) 29

D) 33



3. Se desean hacer velas en forma de cono truncado a partir de otros conos que tienen 16 cm de diámetro y una altura de 20 cm. ¿A que distancia desde la base de los conos se debe hacer el corte para que el círculo formado en tenga un radio de 4 cm?

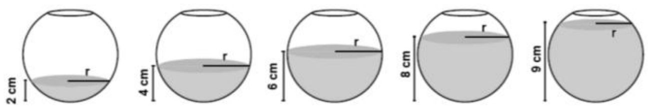
A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

4. En la siguiente tabla se registran los radios de los círculos que aparecen como cortes horizontales de las esferas al llenarlas de agua.



Altura [cm]	2	4	6	8	10
Radio [cm]	4.47	5.62	6	a	b

Si las esferas son de radio 6 cm, ¿cuáles son, respectivamente, los valores en cm de a y b?

A) 6.37 y 7.13

B) 5.65 y 4.47

C) 6.35 y 6.70

D) 5.65 y 5.30

5. Un cono tiene 25 cm de alto y una base de radio igual a 5 cm. Si se hacen cortes horizontales al cono a 10 cm y 15 cm desde la base, ¿Cuántos centímetros mide el radio de cada uno de los círculos formados al hacer los cortes?

A) 1 y 2

B) 1 y 4

C) 3 y 4

D) 3 y 2

TEMA EXTRA: EL CÁLCULO DE ÁREAS Y LOS POLINOMIOS

Bloque I

Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico

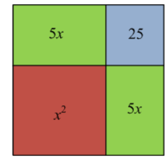
Tema: Significado y uso de las operaciones

Subtema: Operaciones combinadas

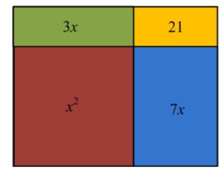
Resultado general de aprendizaje: Transforma expresiones algebraicas en otras equivalentes al efectuar cálculos.

Resultado específico de aprendizaje:

Desarrolla productos de binomios algebraicos empleando modelos geométricos y viceversa.



Modelo I



Modelo II

Introducción:

Observa los modelos geométricos I y II que se muestran en la figura de arriba. Si consideramos que el área de cualquier rectángulo puede calcularse con el producto de su altura por su anchura, podemos escribir el área total de cada modelo como un polinomio y notarás que al reducirlo éste presentan la misma forma de algún producto notable que ya conoces. En el caso del Modelo I, al escribir los términos que aparecen en cada una de las zonas del cuadrado tenemos

$$x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

De lo anterior podemos observar que el Modelo I corresponde a la expansión del binomio al cuadrado $(x+5)^2$, es decir

$$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Nota que la figura que lo representa es un cuadrado de lado $x+5$. ¿Puedes determinar a qué producto notable corresponde el Modelo II?

Desarrollo:

A continuación te presentamos la manera en que algunos de los **productos notables** que ya conoces pueden ser representados mediante modelos geométricos, consideramos los casos del binomio al cuadrado (suma y resta), producto de binomios conjugados y producto de dos binomios con término común.

Para cada caso, comenzamos con una breve recapitulación de su modelo algebraico para posteriormente describir la forma en que se construye su respectivo modelo geométrico; finalizando con el planteamiento de algunos ejercicios que tendrás que resolver aplicando lo aprendido.

*Los **productos notables** son algunas multiplicaciones entre polinomios que pueden efectuarse a través de procesos simplificados debido a la naturaleza de los polinomios involucrados. Entre los más comunes se encuentran el binomio al cuadrado, el producto de dos binomios conjugados, el producto de dos binomios con término común y el binomio al cubo*

Recuerda

Binomio al cuadrado

El binomio al cuadrado puede presentarse como una suma $(x+a)^2$ o como una resta $(x-a)^2$. En cualquiera de los dos casos lo que se encuentra al interior del paréntesis debe ser multiplicado por sí mismo.

Recuerda

*Si el binomio es una **suma**, el producto es el cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo.*

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

*Si el binomio es una **resta**, el producto es el cuadrado del primer término menos el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo.*

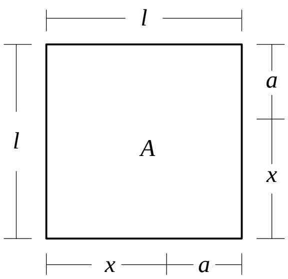
$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

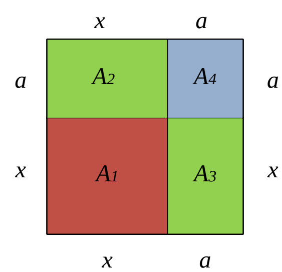
Podemos en general decir que:

Binomio al cuadrado

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

Para establecer el modelo geométrico del cuadrado de una suma, consideremos un cuadrado de lado $l = x + a$, como el mostrado en la figura inferior izquierda.



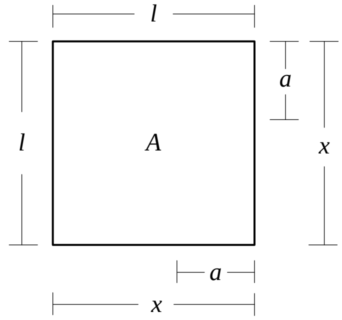


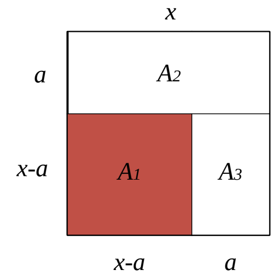
Ahora bien, sabemos que para calcular el área de un cuadrado debemos elevar a la segunda potencia la longitud de su lado, es decir, $A = l^2$; pero como el lado del cuadrado es igual a la suma $x + a$, tenemos que $A = l^2 = (x+a)^2$ y corresponde un binomio al cuadrado. Por otro lado, si dividimos el cuadrado anterior de manera que podamos identificar cada una de las partes que lo conforman obtenemos un cuadrado como el de la derecha. De esta forma, también podemos calcular el área del cuadrado original a partir de la suma de las cuatro áreas que se forman en su interior, $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= x^2 + ax + ax + a^2 \\ &= x^2 + 2ax + a^2\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que el área de un cuadrado de lado $x + a$ corresponde al caso del binomio al cuadrado, cuando el binomio es una suma, en este caso $(x+a)^2$. El producto resultante $x^2 + 2ax + a^2$ se conoce como *trinomio cuadrado perfecto*.

Para establecer el modelo geométrico del cuadrado de una diferencia, partimos de un cuadrado de lado $l = x$, al que se le restaría a como el mostrado en la figura inferior izquierda.





Observando la figura anterior notamos que para este caso el área que corresponde a $(x-a)^2$ es A_1, es decir, $A_1=(x-a)^2$ y podemos obtenerla restando las áreas restantes A_2 y A_3 del área original A, o sea que $A_1 = A - A_2 - A_3$.

$$\begin{aligned}(x-a)^2 &= A - A_2 - A_3\\ &= x^2 - ax - a(x-a)\\ &= x^2 - ax - ax + a^2\\ &= x^2 - 2ax + a^2\end{aligned}$$

Producto de binomios conjugados

Decimos que un binomio es el conjugado de otro cuando presenta los mismos términos que el binomio de referencia, con la particularidad que uno de sus términos tiene signo contrario.

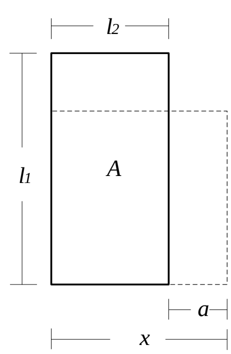
Recuerda

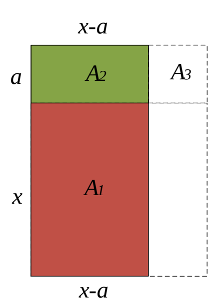
$x+a$	$x-a$
Binomio de referencia	*Binomio conjugado*

Podemos en general decir que:

Producto de binomios conjugados
$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

Para establecer el modelo geométrico del producto de binomios conjugados partimos de un rectángulo de lados $l_1 = x+a$ y $l_1 = x-a$, como el mostrado en la figura inferior izquierda, de manera que su área A correspondería al producto del binomio $(x+a)$ y su conjugado $(x-a)$, es decir, $A=(x+a)(x-a)$.

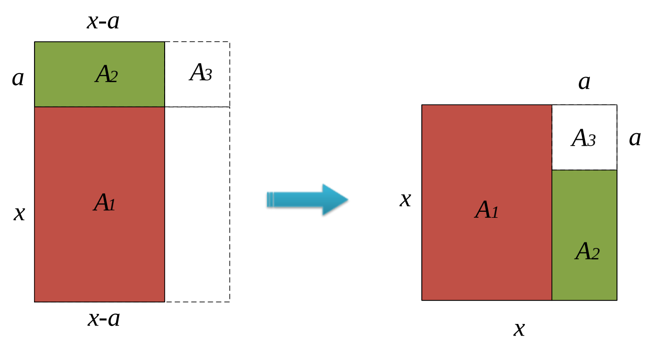




Si observas la figura anterior notarás que $A = A_1 + A_2$, entonces

$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= A_1 + A_2 \\ &= x(x-a) + a(x-a) \\ &= x^2 - ax + ax - a^2 \\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

Podemos acomodar la áreas A_1, A_2 y A_3 dentro de un cuadrado de lado $l = x$, de manera que se haga evidente que el resultado de multiplicar el binomio $(x+a)$ por su conjugado $(x-a)$ equivale a restarle al área de un cuadrado de lado x, el área del cuadrado de lado a (área A_3).



Producto de dos binomios con término común

Decimos que dos binomios tienen un término común cuando ambos presentan un término idéntico en su parte numérica, parte literal y su signo.

Recuerda

$$x + a \qquad\qquad x + b$$

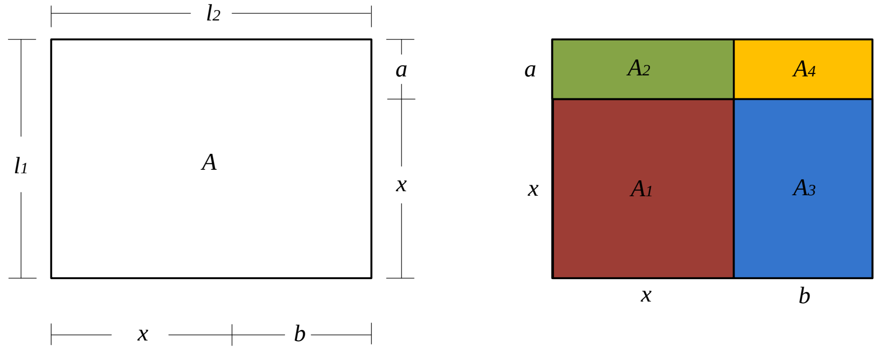
En el ejemplo anterior, el término común a ambos binomios es x.

Podemos en general decir que:

Producto de dos binomios con término común

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Para establecer el modelo geométrico del producto de dos binomios con término común partimos de un rectángulo de lados $l_1 = x + a$ y $l_1 = x + b$, como el mostrado en la figura inferior izquierda, de manera que su área A correspondería al producto de los binomios $(x+a)$ y $(x+b)$, es decir, $A = (x+a)(x+b)$.



De la figura anterior, es fácil notar que $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, por lo que

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x^2 + (a+b)x + ab\end{aligned}$$

Observa que hemos extraído el “factor común” del segundo y tercer término del desarrollo anterior de manera que el resultado final queda expresado por un polinomio de tres términos. Puedes comprobar fácilmente que $(a+b)x = ax + bx$.

Actividad

Construye modelos geométricos que correspondan al resultado de cada uno de los siguientes productos notables.

1) $(x+4)^2 =$

2) $(x-3)^2 =$

3) $(x+2)(x-2) =$

4) $(x+3)(x+1) =$

5) $(x+5)(x-2) =$

Comprueba algebraicamente tus modelos geométricos.

Cierre:

En esta sesión te hemos presentado una de las formas en que podemos combinar el álgebra con la geometría. Particularmente pudiste observar y aplicar el concepto de área de cuadrados y rectángulos en la representación geométrica de algunos productos notables entre binomios. Puedes encontrar más información sobre este tema en los enlaces que te proporcionamos a continuación.

Para saber más…

http://201.117.193.231/new_media/secundaria_3/matematicas_b1/oda_2540_10004/recurso/

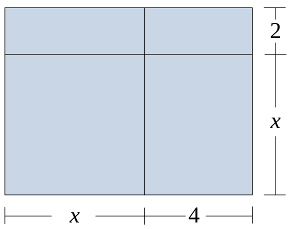
http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/gis/recursos/mat3/oda/3m_b01_t01_s01_descartes/GIS_02_index.html

Evaluación:

Para finalizar el tema te pedimos que resuelvas la siguiente evaluación.

Indicaciones: En cada uno de los siguientes reactivos, selecciona la opción que corresponda a la representación algebraica del área sombreada de la figura mostrada.

1.



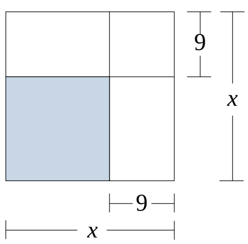
A) $(x-2)(x-4)$

B) $(x+6)^2$

C) x^2+6x+8

D) x^2+2x+4

2.



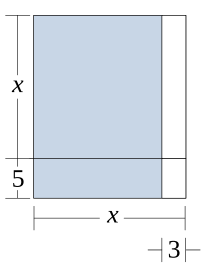
A) $(x+9)(x-9)$

B) $(x-9)^2$

C) $x^2+18x+81$

D) $x^2-3x+18$

3.



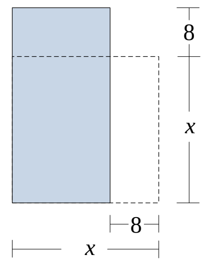
A) $(x+5)(x+3)$

B) $(x-5)(x+3)$

C) $x^2-2x+15$

D) $x^2+2x-15$

4.



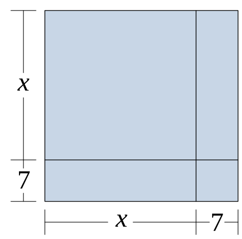
A) $(x+8)(x-8)$

B) $(x+8)^2$

C) x^2+81

D) $x^2-16x+64$

5.



A) $(x+7)(x-7)$

B) $(x+7)^2$

C) $x^2-14x+49$

D) x^2+49

Anexo 1. Clave de respuestas correctas de las evaluaciones

TEMA 1

No.	A	B	C	D
1.	●	○	○	○
2.	○	○	○	●
3.	○	○	○	●
4.	●	○	○	○
5.	○	●	○	○

TEMA 4

No.	A	B	C	D
1.	○	○	●	○
2.	●	○	○	○
3.	○	●	○	○
4.	○	○	●	○
5.	○	●	○	○

TEMA 2

No.	A	B	C	D
1.	○	●	○	○
2.	○	○	●	○
3.	○	○	○	●
4.	●	○	○	○
5.	○	○	○	●

TEMA 5

No.	A	B	C	D
1.	○	●	○	○
2.	○	○	●	○
3.	○	●	○	○
4.	○	●	○	○
5.	○	○	○	●

TEMA 3

No.	A	B	C	D
1.	○	○	●	○
2.	○	●	○	○
3.	○	●	○	○
4.	○	○	○	●

TEMA EXTRA

No.	A	B	C	D
1.	○	○	●	○
2.	○	●	○	○
3.	○	○	○	●
4.	●	○	○	○
5.	○	●	○	○

HOJA DE RESPUESTAS	
Nombre	
Escuela	
Grado	
Grupo	

Instrucciones:
Contesta las preguntas de la evaluación de cada tema presentado, rellenando con lápiz el círculo que corresponde a la respuesta correcta.

TEMA 1

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 4

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 2

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 5

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

TEMA 3

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○

TEMA EXTRA

No.	A	B	C	D
1.	○	○	○	○
2.	○	○	○	○
3.	○	○	○	○
4.	○	○	○	○
5.	○	○	○	○

SECRETARÍA
DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE
GUANAJUATO